



مدلهای حمل و نقل و تخصیص

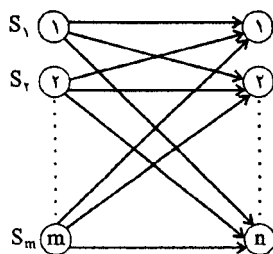
۶

۱-۶- برنامه‌ریزی حمل و نقل

مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌تواند به کمک سیمپلکس حل شود، وقتی که مسئله حمل و نقل به فرم یک مسئله برنامه‌ریزی خطی نوشته می‌شود، قابل حل با روش سیمپلکس خواهد بود. ولی باتوجه به اینکه مسئله حمل و نقل دارای ساختار خاصی می‌باشد آن را می‌توان به کمک تکنیک‌های کاراتری مثل برنامه‌ریزی حمل و نقل حل نمود.

۱-۶-۱- دلایل استفاده از مسئله حمل و نقل

- ۱- بسیاری از مسائل واقعی که در طبیعت وجود دارد بدین روش فرموله می‌شود.
 - ۲- بدلیل ساختار خاص مسائل حمل و نقل با الگوریتم‌های کاراتر از روش سیمپلکس قابل حل می‌باشد.
 - ۳- این الگوریتم‌ها در صورتی که اطلاعات اولیه عدد صحیح باشد جواب صحیح را حاصل می‌سازد.
- مدل حمل و نقل به شکل شبکه‌ای در نظر گرفته می‌شود که گره‌های آن نمایانگر مقاصد و مبادی می‌باشد.
- حال هرگاه در مدل برنامه‌ریزی حمل و نقل گره‌های واسطه وجود نداشته باشد و حمل و نقل از مبدأها به مقاصد بطور مستقیم انجام پذیرد، مدل حمل و نقل ساده حاصل شده است در غیراینصورت



۱-۲- مدل مسئله حمل و نقل

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i \quad (i = 1, 2, \dots, m \text{ محدودیتهای عرضه از مبدأ } i)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n \text{ محدودیتهای تقاضا در مقصد } j)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Z : تابع هدف مدل که عبارت است از تعیین مقدار کالایی که باید از مبدأ i به مقصد j حمل شود تا کل هزینه حمل و نقل حداقل گردد.

x_{ij} : مقدار کالایی که از مبدأ i به مقصد j حمل می شود.
 C_{ij} : هزینه حمل هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j

s_i : مقدار عرضه مبدأ i ام

d_j : مقدار تقاضای مقصد j ام

m : تعداد مبدأها (عرضه)

n : تعداد مقصدها (تقاضا)

مقصد \ مبدأ	۱	۲	n	عرضه S_i
۱	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}		C_{1n} x_{1n}	S_1
۲	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}		C_{2n} x_{2n}	S_2
...					...
m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}		C_{mn} x_{mn}	S_m
تقاضا d_j	d_1	d_2	d_n	

۱-۳- فرضیات مدل حمل و نقل

۱- هزینه حمل هر واحد کالا معین است.

۲- تقاضای مقاصد از طریق عرضه مستقیم کالا از مبدأها تامین می شود.

۳- امکان ارسال کالا بین دو مبدأ یا بین دو مقصد وجود ندارد.

مبداهایی و از چه مسیری انجام شود.

📌 **نکته:** هرگاه در مسئله حمل و نقل، بهره‌وری حمل کالا مورد بررسی قرار گیرد، تابع هدف از نوع حداکثر کردن (Max) می‌شود ولی غالباً مسائل در حالت حداقل نمودن (Min) مطرح خواهد شد.

۴-۱-۶. خواص مدل حمل و نقل

- ۱- تمام ضرایب فنی در تمام محدودیتها برای متغیرهای تعریف شده (مسیرهایی که در شبکه موجودند) برابر ۱ می‌باشد و برای سایر متغیرها برابر صفر است.
- ۲- در هر ستون از ماتریس ضرایب دقیقاً دو عدد ۱ و مابقی صفر می‌باشند یعنی هر متغیر تصمیم‌گیری فقط در ۲ محدودیت تکرار شده است. (یکبار در محدودیتهای عرضه و یکبار در محدودیتهای تقاضا)
- ۳- معمولاً مقادیر عرضه و تقاضا (سمت راست) عدد صحیح می‌باشند.

📌 **نکته:** هر مسئله حمل و نقل همواره دارای جواب موجه و عدد صحیح خواهد بود و هیچ‌گاه حالات بدون جواب بودن یا نامحدود بودن رخ نمی‌دهد.

دلایل اینکه جواب مسئله حمل و نقل همواره عدد صحیح است:

- ۱- عدد صحیح بودن مقادیر سمت راست.
- ۲- در روش حمل و نقل از عملیات جمع و تفریق استفاده شده و اصلاً حالت ضرب و تقسیم وجود ندارد. زیرا تمامی ضرایب تکنولوژی صفر یا یک می‌باشند.
- ۳- مقدار عنصر پاشنه گردی در مقایسه با روش سیمپلکس همواره عدد ۱ می‌باشد. بعبارت بهتر دترمینان ماتریس ضرایب همواره صفر یا ± 1 می‌باشد.

۴-۱-۷. نکات اساسی مدل حمل و نقل

- ۱- در هر مسئله حمل و نقل (که در آن m تعداد محدودیتهای عرضه و n تعداد محدودیتهای تقاضا باشد) در مجموع دارای $m+n$ محدودیت می‌باشد.
- ۲- تعداد متغیرهای تصمیم مدل حمل و نقل برابر $m \cdot n$ متغیر می‌باشد.
- ۳- تعداد ضرایب تکنولوژی مساوی با عدد یک mn می‌باشد.
- ۴- تعداد ضرایب تکنولوژی مساوی با عدد صفر، $mn(m+n) - mn$ می‌باشد.
- ۵- اگر جمع کل عرضه و تقاضا برابر باشد ($\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$)، آنگاه مسئله متوازن می‌باشد.
- ۶- اگر کل عرضه از کل تقاضا کمتر باشد ($\sum_{i=1}^m s_i < \sum_{j=1}^n d_j$) مسئله نامتوازن است که در این حالت با

معرفی عرضه مجازی جدید، به اندازه $(\sum^n d_j - \sum^m s_i)$ به سطر جدول اضافه می‌کنیم. در اینصورت هزینه‌های حمل و نقل آن سطر $(C_{ij} = 0)$ مساوی صفر خواهد شد.

۷- اگر کل عرضه از کل تقاضا بیشتر باشد $(\sum^m s_i > \sum^n d_j)$ مسئله نامتوازن بوده که در اینصورت با معرفی یک تقاضای مجازی جدید به اندازه $(\sum^m s_i - \sum^n d_j)$ به ستون جدول اضافه می‌شود که در این حالت هزینه حمل و نقل تقاضای مجازی $(C_{ij} = 0)$ خواهد بود.

۸- در حالت حمل و نقل نامتوازن تعداد کل محدودیت‌ها $(m+n+1)$ و تعداد متغیرها $m \times (n+1)$ یا $(m+1) \times n$ خواهد بود.

۹- هرگاه مسئله حمل و نقل متوازی دارای m مبدأ عرضه و n مقصد تقاضا حل شود، حداکثر دارای $(m+n-1)$ متغیر پایه می‌باشد. بعبارت بهتر مرتبه ماتریس ضرایب برابر $(m+n-1)$ خواهد بود و تعداد بردارهای مستقل نیز حداکثر $m+n-1$ خواهد بود. اگر مسئله نامتوازن باشد $(m+n-1)$ به $m+n$ تبدیل می‌شود.

۱۰- هرگاه مسئله حمل و نقل به روش سیمپلکس حل شود، تعداد پایه‌ها برابر تعداد محدودیت‌های مسئله $(m+n)$ می‌باشد که یکی از آنها برابر صفر خواهد بود. بنابراین هرگاه مسئله حمل و نقل به روش سیمپلکس حل شود حتماً جواب منحنی خواهد داشت.

۱۶-۱- شروط لازم و کافی در مسئله حمل و نقل

الف) برای وجود جواب: هر مسئله حمل و نقل در صورتی که متوازن یا نامتوازن باشد جواب دارد و نیازی به هیچگونه شرطی نخواهد داشت.

ب) برای جواب عدد صحیح: باید مقادیر عرضه و تقاضا عدد صحیح باشد. در صورتی که مسئله به گونه‌ای مطرح شود که ضرایب تکنولوژی صفر یا یک نباشد، باید با روابط ریاضی ضرایب را صفر و یک نمود.

ج) برای وجود جواب بهینه: به ازای جواب قابل قبول مسئله اولیه، حل مزدوج متناظری وجود داشته باشد که جواب آن نیز قابل قبول بوده و دارای مقادیر تابع هدف یکسانی باشند.

ع-۲- الگوریتم حل مدل حمل و نقل

- | | | |
|--|---|---|
| <p>۱- روش گوشه شمال غربی (سمت چپ بالا)</p> <p>۲- روش کمترین هزینه سطری یا ستونی</p> <p>۳- روش کمترین هزینه ماتریسی</p> <p>۴- روش تقریبی و گل</p> | } | <p>قدم اول) تعیین جواب اساسی موجه اولیه</p> <p>با یکی از روشهای مقابل</p> |
|--|---|---|

نکته: براساس تجربه غالباً جوابهای حاصل از روشهای فوق به ترتیب از پائین به بالا به جواب بهینه نزدیکتر می باشند.

- | | | |
|--|---|---|
| <p>۱- روش مستقیم (اولیه یا پله سنگ)</p> <p>۲- روش مضارب (مزدوج، توزیع تعدیل شده، MODI)</p> | } | <p>قدم دوم) تعیین جواب بهینه از جواب اساسی بهینه اولیه با یکی از روشهای مقابل</p> |
|--|---|---|
- نکته:** اگر چنانچه به جواب بهینه نرسیدیم، با انتخاب متغیر ورودی و خروجی و تعیین جواب اساسی موجه جدید قدم دوم را تا رسیدن به حل نهایی ادامه می دهیم.

ع-۳- روش گوشه شمال غربی

- ۱- بجای گوشه شمال غربی از هرکدام از گوشه های دیگر می توان استفاده نمود.
- ۲- تعداد متغیرهای اساسی حاصله از این روش حداکثر $(m + n - 1)$ می شود و در صورتی که کمتر از این تعداد باشد، مسئله دارای حالت منحنی است.
- ۳- در محاسبه تعداد مبداهای و مقصدها توجه کنید که سطر یا ستون مجازی محاسبه شود.
- ۴- هرگاه مقادیر عرضه و تقاضا غیر از مرحله آخر سطر بطور همزمان صفر شود (بصورت قطری حرکت نموده) در نهایت حل مسئله منحنی خواهد بود.
- ۵- بدلیل استقلال متغیرهای پایه از یکدیگر به کمک خطوط عمودی و افقی نمی توان حلقه بسته تشکیل داد زیرا در اینصورت باید متغیرهای پایه وابسته باشند.
- ۶- این روش تنها روشی است که به هزینه های حمل و نقل ارتباطی ندارد و بدون توجه به هزینه های حمل و نقل قابل حل است. به همین دلیل این روش یک جواب پایه موجه جواب ارائه نمی دهد.

ع-۴- روش کمترین هزینه ماتریسی

- ۱- در شرایط تساوی، حداقل هزینه یکی از سلولها به اختیار انتخاب می شود ولی بهتر است آن سلولی انتخاب شود که می تواند تخصیص بیشتری به خود اختصاص دهد.
- ۲- برای محاسبه حداقل هزینه توجه کنید که حتی الامکان از سطر یا ستون مجازی تا زمانی که

مجبور نشده‌اید استفاده نکنید.

۳- اگر سطر و ستون مقادیر عرضه و تقاضا غیر از مرحله آخر یکبار صفر شود، جواب حاصل منحنی بوده و تعداد متغیرهای پایه کمتر از $(m + n - 1)$ خواهد بود.

۵- روش تقریبی وگل

۱- در شرایط تساوی، هزینه یکی به دلخواه انتخاب می‌شود ولی بهتر است آن سلولی انتخاب شود که می‌تواند تخصیص بیشتری به خود اختصاص دهد.

۲- برای محاسبه اختلاف دو حداقل هزینه سطری یا ستونی حتی الامکان از سطر یا ستون مجازی استفاده نکنید.

۳- زمانی که فقط یک سطر یا فقط یک ستون باقی مانده است الگو را خاتمه داده و تخصیص‌های باقی‌مانده را بطور همزمان انجام دهید.

در بهبود جوابها به روش‌های پله سنگ و مضارب قابل ذکر است که روش اول با استفاده از مفهوم مسئله اولیه، نسبت به تعیین جواب بهینه اقدام می‌کند، در حالی که در روش مضارب حل بهینه با استفاده از مفهوم مسئله ثانویه انجام می‌شود.

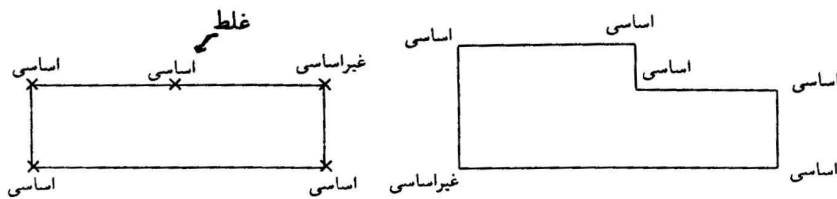
۶- روش پله سنگ

این روش روندی را دنبال می‌نماید تا با یک سری عملیات متوالی از یک جواب موجه ابتدایی به جواب بهینه برسد. گام‌های زیر جهت بهبود جواب بکار گرفته می‌شود.

گام ۱- یک خانه خالی (یک متغیر غیراساسی) را جهت ارزیابی انتخاب کنید.

گام ۲- برای خانه خالی انتخاب شده یک مسیر پله سنگ رسم کنید. یکی از گوشه‌های این مسیر در خانه خالی انتخابی (خانه‌ای که متغیر غیراساسی دارد) قرار گرفته و سایر گوشه‌ها باید در خانه‌های پر (خانه‌هایی که متغیرهای آن اساسی است) واقع شده و سپس به گوشه موردنظر که در خانه خالی قرار گرفته علامت $(+)$ اختصاص داده و به سایر گوشه‌ها، یکی در میان علامت منفی $(-)$ و سپس $(+)$ تخصیص دهید.

تذکره: مسیر پله سنگ، مسیری است بسته و منحصر به فرد که دارای اضلاع عمود بر هم می‌باشد. در روش پله سنگ هر حرکت فقط به یک متغیر اساسی منتهی می‌شود و نقطه شروع و پایان آن، متغیر غیراساسی مورد بررسی می‌باشد.



گام ۳ - هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه‌هایی که دارای علامت مثبت هستند را با هم جمع و از مجموع هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه‌هایی که دارای علامت (-) هستند، کم کنید عدد حاصل ارزش خانه خالی انتخابی را نشان می‌دهد ($\bar{C}_{ij} = C_{ij} - Z_{ij}$)

گام ۴ - ارزش تمامی خانه‌های خالی را مطابق گام‌های فوق بدست آورده، اگر ارزش تمامی خانه‌های خالی عددی غیر منفی بود به جواب بهینه رسیده‌اید، در غیر اینصورت این جدول بهینه نبوده و گام‌های بعدی را اجرا کنید.

گام ۵ - انتخاب متغیر ورودی: آن خانه خالی را که دارای منفی‌ترین ارزش محاسبه شده ($\bar{C}_{ij} = C_{ij} - Z_{ij}$) باشد را انتخاب کنید و متغیر مربوط به این خانه را متغیر ورودی بنامید.

گام ۶ - انتخاب متغیر خروجی: از میان تمام خانه‌هایی که رأس مسیر پله سنگ در آن قرار گرفته و دارای علامت منفی هستند، خانه‌ای را که دارای کمترین مقدار متغیر اساسی (x_{ij}) است را انتخاب کنید. متغیر مربوط به این خانه را متغیر خروجی بنامید.

گام ۷ - بدست آوردن جدول جدید: یک جدول جدید رسم کرده و مقدار خانه انتخابی در گام ۶ (مقدار x_{ij} متغیر خروجی) را به مقدار x_{ij} خانه‌هایی که دارای علامت (+) هستند، اضافه کرده و از مقدار x_{ij} خانه‌هایی که دارای علامت منفی (-) هستند کم کنید و مقدار سایر خانه‌هایی که رأس‌های مسیر پله سنگ در آنها قرار نگرفته به همان صورت به جدول جدید منتقل کرده و به گام اول برگردید.

نکته: مقدار هزینه کاهش یافته تابع هدف از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$C_{ij} - Z_{ij} \text{ (مقدار متغیر خروجی)} = \text{هزینه کاهش یافته}$$

۶-۷. روش مضارب (توزیع تعدیل شده)

همانگونه که مطرح شد در روش مضارب حل بهینه با استفاده از مفهوم مسئله ثانویه انجام می‌شود. متغیرهای ثانویه مربوط به محدودیت عرضه با u_i و متغیرهای ثانویه مربوط به محدودیت‌های تقاضا با v_j تعریف می‌شود.

۷-۶-۱. ثانویه (دوگان) مسئله حمل و نقل

اگر یک مسئله حمل و نقل بصورت زیر باشد:

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i \quad (i = 1, \dots, m \text{ محدودیتهای عرضه از مبدأ})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad (j = 1, \dots, n \text{ محدودیتهای تقاضا در مقصد})$$

$$x_{ij} \geq 0$$

آنگاه ثانویه (دوگان) آن بصورت زیر نگاشته می شود.

$$\text{Max } Y = \sum_{i=1}^m S_i u_i + \sum_{j=1}^n d_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq C_{ij}$$

u_i, v_j آزاد در علامت

مطابق قضایای دوگان، متغیر x_{ij} وقتی اساسی می شود که محدودیت ثانویه متناظر با آن فعال بوده و بصورت تساوی برقرار باشد. یعنی برای متغیرهای اساسی (خانه های جدول با مقادیر مثبت) رابطه $u_i + v_j = C_{ij}$ برقرار است. حال با استفاده از رابطه فوق کلیه مقادیر u_i (به تعداد سطرهای جدول حمل و نقل) و v_j (به تعداد ستونهای جدول حمل و نقل) را بدست می آوریم که تعداد این مجهولها $(m+n)$ بوده و تعداد معادلات $u_i + v_j = C_{ij}$ (به تعداد متغیرهای اساسی یعنی $m+n-1$) خواهد بود. لذا به یکی از مجهولات (معمولاً u_1) مقدار دلخواه صفر را تخصیص داده و سایر مجهولات u_i و v_j را با استفاده از رابطه $u_i + v_j = C_{ij}$ جهت متغیرهای اساسی بدست می آوریم و برای خانه های تخصیص نیافته (متغیرهای غیر اساسی) مقادیر $C_{ij} - (u_i + v_j)$ محاسبه نموده و گام های زیر را انجام می دهیم.

۷-۶-۲. گام های حل روش مضارب

در این روش نیز از یک جواب موجه ابتدایی گامهای زیر جهت بهبود جواب برداشته می شود.

گام ۱- از رابطه $u_i + v_j = C_{ij}$ استفاده کرده و براساس خانه های پر برای هر سطر، یک u_i و برای هر ستون، یک v_j محاسبه کنید.

گام ۲ - با استفاده از اطلاعات گام اول، ارزش خانه‌های خالی را با استفاده از رابطه $C_{ij} - Z_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ محاسبه نمایید اگر کلیه این مقادیر غیر منفی بود به جواب بهینه رسیده‌اید در غیر اینصورت به گام بعد بروید.

گام ۳ - خانه خالی را که دارای منفی ترین مقدار $C_{ij} - Z_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ می باشد مشخص نموده و متغیر مربوط به آن را متغیر ورودی بنامید.

گام ۴ - برای خانه خالی انتخاب شده در گام چهارم، یک مسیر پله سنگ رسم نموده و از میان خانه‌هایی که دارای علامت منفی می باشند، خانه‌ای را که دارای کمترین مقدار x_{ij} است انتخاب و متغیر مربوط به آن را متغیر خروجی بنامید.

گام ۵ - مقدار خانه انتخاب شده در گام ۴ (x_{ij}) را به مقدار خانه‌هایی که دارای علامت مثبت هستند اضافه و از مقدار خانه‌هایی که دارای علامت منفی هستند، کم کنید تا جدول جدید بدست آید، سپس به گام اول برگردید.

۶-۱ حالات خاص در روش حمل و نقل

۱- مسئله حمل و نقل هیچ وقت دارای حالت خاص بدون جواب بهینه یا منطقه موجه نامحدود نیست و همواره جوابی موجه و عدد صحیح خواهد داشت.

۲- در مرحله یافتن جواب موجه ابتدایی: هرگاه در تخصیص مقادیر به یک خانه خالی، همزمان میزان عرضه سطر و تقاضای ستون با هم به صفر برسد. در این شرایط یا سطر یا ستون حذف می شود و به یکی از خانه‌های خالی سطر یا ستون دیگر مقدار صفر تعلق می گیرد. در این حالت مقدار صفر به یک متغیر اساسی تعلق گرفته و حالت خاص جواب تبهگن است.

۳- در مرحله بهبود جواب: هرگاه هنگام تعیین متغیر خروجی، در گوشه‌های منفی دو مقدار حداقل، یکسان داشته باشیم در جدول بعد یکی از متغیرها از پایه خارج می شود و متغیر دیگر با مقدار صفر در پایه باقی می ماند که در این حالت جواب اساسی تبهگن خواهیم داشت.

۴- در جدول حمل و نقل اگر کمتر از $m + n - 1$ متغیر اساسی داشته باشیم، در این حالت به تعداد کمبود، متغیر اساسی تبهگن وجود خواهد داشت.

۵- هرگاه مقدار یک یا چند خانه خالی (متغیر غیر اساسی)، با رابطه $Z_{ij} - C_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$ معادل صفر گردد مسئله دارای حالت خاص جواب بهینه چندگانه خواهد شد.

۹-۶- تحلیل حساسیت مسئله حمل و نقل

الف - ضرایب متغیرهای غیراساسی
ب - ضرایب متغیرهای اساسی

۱- تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف
۲- تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا (اعداد سمت راست)

تحلیل حساسیت
مدل حمل و نقل

۹-۶-۱- تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف برای متغیرهای غیراساسی

در مسائل Min وقتی، جواب بهینه است که رابطه $C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی برقرار باشد. حال ضرایب C_{ij} جهت متغیرهای غیراساسی باید به گونه‌ای تغییر نمایند که جواب فعلی بهینه باقی بماند بنابراین برای متغیرهای غیراساسی x_{ij} باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$C_{ij} + \Delta_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$$

که در آن Δ_{ij} میزان تغییرات ضریب تابع هدف متغیر غیراساسی x_{ij} خواهد بود.

۹-۶-۲- تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف برای متغیرهای اساسی

در جدول بهینه اگر x_{ij} متغیر اساسی باشد رابطه $C_{ij} = u_i + v_j$ همواره برقرار است. حال جهت تعیین دامنه تغییرات مجاز C_{ij} ، بجای عبارت C_{ij} عبارت $C_{ij} + \Delta_{ij}$ را در جدول بهینه قرار داده و مجدداً u_i و v_j های جدید را محاسبه نموده و سپس مقادیر $(u_i + v_j) - C_{ij}$ را برای کلیه مقادیر غیراساسی مربوطه محاسبه نموده و جهت حفظ شرط بهینگی، بزرگتر مساوی صفر قرار می‌دهیم $(C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0)$ و حدود تغییرات C_{ij} موردنظر (Δ_{ij}) را بدست می‌آوریم.

۹-۶-۳- تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا (اعداد سمت راست)

تابع هدف مسئله ثانویه در مدل حمل و نقل بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$Max Y = \sum_i^m S_i u_i + \sum_j^n d_j v_j$$

که در آن u_i و v_j ها متغیر ثانویه و بیانگر قیمت‌های سایه در جدول بهینه می‌باشند و هرگونه تغییر در میزان عرضه مبادی یا تقاضای مقاصد موجب تغییر در مقدار بعضی از متغیرهای اساسی خواهد شد. باتوجه به این مطالب تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا بدین صورت طبقه‌بندی می‌شود:

حالت (۱) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ i و کاهش همزمان یک واحد در

تقاضای مقصد j عبارتست از:

$$\Delta Z = u_i - v_j$$

حالت ۲) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ i و افزایش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد j عبارتست از:

$$\Delta Z = u_i + v_j$$

حالت ۳) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در تقاضای مقصد j و کاهش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد k عبارتست از:

$$\Delta Z = v_j - v_k$$

حالت ۴) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در عرضه مبدأ i و کاهش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد j عبارتست از:

$$\Delta Z = -u_i - v_j$$

حالت ۵) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ k عبارتست از:

$$\Delta Z = u_k - \text{Max } u_i$$

که در آن از عرضه مبدأ متناظر با $\text{Max } u_i$ یک واحد کاسته می شود.

حالت ۶) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در تقاضای مقصد l عبارتست از:

$$\Delta Z = v_l - \text{Max } v_j$$

که در آن از تقاضای مقصد متناظر با $\text{Max } v_j$ یک واحد کاسته می شود.

حالت ۷) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در عرضه مبدأ k عبارتست از:

$$\Delta Z = -u_k - \text{Max } u_i$$

که در آن به عرضه مبدأ متناظر با $\text{Max } u_i$ یک واحد اضافه می شود.

حالت ۸) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در تقاضای مقصد l عبارتست از:

$$\Delta Z = -v_l - \text{Max } v_j$$

که در آن به تقاضای مقصد متناظر با $\text{Max } v_j$ یک واحد اضافه می شود.

۶-۱- مسئله تخصیص (واگذاری)

مدل تخصیص (Assignment) مدلی خاص از مسئله حمل و نقل می باشد که برای تخصیص یک کار یا فعالیت یا شغل یا وظیفه به یک ماشین، کارگر، یا شخص استفاده می شود به گونه ای که هزینه تخصیص حداقل گشته و یا بهره وری و سود ناشی از تخصیص حداکثر گردد.

📌 نکته: در مدل تخصیص تعداد عرضه m و تقاضا n با هم برابر بوده ($m=n$) و همچنین مقدار مقادیر عرضه و تقاضا مساوی یک می باشد.

$$s_i = d_j = 1$$

ماتریس هزینه یک مسئله تخصیص به صورت زیر ترسیم می شود.

شغل \ فرد	۱	۲	j	...	n
۱	C_{11}	C_{12}	C_{1j}	...	C_{1n}
۲	C_{21}	C_{22}	C_{2j}	...	C_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	C_{i1}	C_{i2}	C_{ij}	...	C_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	C_{n1}	C_{n2}	C_{nj}	...	C_{nn}

۱۱-۶- روش های حل مدل تخصیص

۱۱-۶-۱- روش شمارش کامل

می خواهیم n شغل را به n فرد تخصیص دهیم به گونه ای که حداکثر بهره دوری حاصل شود. در این روش کلیه حالات ممکن تخصیص شغل ها به افراد در نظر گرفته شده و برای هر کدام مقدار تابع هدف را محاسبه می کنیم. بهترین حالت وقتی است که تابع هدف کمترین مقدار را داشته باشد. این روش کاربرد چندانی ندارد.

نکته: تعداد کل حالات تخصیص n شغل به n فرد $n!$ می باشد.

۱۱-۶-۲- روش برنامه ریزی عدد صحیح

در برنامه ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص پارامترها به شکل زیر تعریف می شود.

x_{ij} : متغیرهای تصمیم برای تخصیص n فرد به n شغل

C_{ij} : هزینه تخصیص فرد i ام به شغل j ام

حال مدل برنامه ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص به شکل زیر تعریف می شود.

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t. : } \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر فرد } i \text{ کار } j \text{ ام را انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

محدودیت اول نشان می دهد که باید به همه افراد شغل تخصیص داده شود و محدودیت دوم نشان می دهد که باید به هر شغلی یک فرد تخصیص داده شود.

۳-۱۱-۶ روش برنامه ریزی خطی

با جایگزینی $x_{ij} \geq 0$ به جای x_{ij} در مدل برنامه ریزی عدد صحیح فوق، مسئله به یک مدل برنامه ریزی خطی تبدیل می شود.

۴-۱۱-۶ روش حمل و نقل

مدل تخصیص در واقع نوع خاصی از مدل حمل و نقل می باشد که در آن مشاغل (عرضه) به افراد (تقاضا) تخصیص داده می شود و به این ترتیب $(n, n = n^2)$ متغیر تصمیم (x_{ij}) وجود خواهد داشت که از این متغیرها تعداد $(1 - 2n + n + n)$ متغیر اساسی، خواهد بود. ولی چون هر متغیر اساسی با مقدار یک، همزمان نیازمندی یک سطر و ستون را برآورده می کند، پس در هر سطر یا ستون یک متغیر اساسی با مقدار صفر داریم. به عبارت دیگر از $2n - 1$ متغیر اساسی n متغیر اساسی با مقدار یک و $n - 1$ متغیر اساسی با مقدار صفر (جوابهای تبهگن) وجود دارد.

۵-۱۱-۶ روش مجارستانی (بسط ماتریسی)

روش مجارستانی بهترین روش برای حل مدل تخصیص بوده و مبتنی بر خاصیت ماتریسها در روابط بین مسئله اولیه و ثانویه می باشد. این روش بر مبنای قضیه زیر بنیان نهاده شده است. «اگر تمامی اعداد هر سطر یا ستون یک مسئله تخصیص، به یک میزان افزایش یا کاهش یابند، جواب بهینه مسئله تخصیص جدید، معادل همان مسئله اول خواهد بود.»

گام اول - در هر سطر ماتریس هزینه، کوچکترین عدد را انتخاب و از بقیه اعداد موجود در آن سطر کم کرده و ماتریس هزینه جدید تشکیل دهید. سپس در هر ستون ماتریس حاصله نیز، کوچکترین عدد موجود در ستون را از بقیه اعداد همان ستون کم کنید. ماتریس حاصل «ماتریس هزینه های کاهش یافته یا جدول هزینه فرصت» نامگذاری می شود.

گام دوم - با استفاده از حداقل تعداد خطوط، تمامی صفرهای موجود در سطر یا ستون ماتریس هزینه های کاهش یافته را بپوشانید. (این خطوط، خطوط پوششی نامیده می شود و باید حتماً افقی یا عمودی باشند) اگر تعداد خطوط پوشش برابر افراد یا مشاغل (n) باشد به جدول بهینه رسیده اید در غیر اینصورت به گام سوم بروید.

نکته: خطوط پوششی به گونه‌ای ترسیم می‌گردد که هر خط تا آنجا که ممکن است تعداد بیشتری از صفرها را بیوشاند.

گام سوم - کوچکترین عددی را که در ماتریس اخیر روی آن خط کشیده نشده است انتخاب کرده و این عدد را از تمامی اعدادی که روی آنها خطی کشیده نشده است کم کرده و به اعدادی که در محل تقاطع خطوط پوشش قرار دارند اضافه کرده و به گام دوم برگردید.

گام چهارم - پس از رسیدن به جدول بهینه جهت تعیین جواب بهینه، بایستی هرکار به یک فرد واگذار شود. جهت این کار سطر یا ستونی را که فقط یک صفر دارد پیدا کرده و دور آن خط بکشید و بر این مبنا کار و فردی که باید آن را انجام دهد، مشخص می‌شود. حال از سطر و ستونی که صفر آن تعیین شده صرفنظر کرده و در مابقی جدول به دنبال سطر یا ستونی بگردید که یک صفر را داشته باشد و عملیات بدین ترتیب ادامه می‌یابد تا جواب بهینه حاصل شود.

نکته: جواب وقتی بهینه است که در هر سطر یا ستون فقط به دور یک صفر خط کشیده شده باشد.

نکته: پس از بدست آوردن جواب بهینه برای یک مسئله تخصیص ممکن است مقدار و موقعیت صفرها در جدول نهایی به گونه‌ای باشد که بتوان بیش از یک جواب بهینه یافت. هرگاه در جدول نهایی تعداد صفرها برای هر سطر یا ستونی بیش از یک باشد امکان وجود جواب بهینه چندگانه وجود دارد. در جواب بهینه چندگانه مقادیر Z به ازای تمام جوابهای بهینه یکسان می‌باشد.

نکته: در مسئله تخصیص اگر بخواهیم کاری به فردی تخصیص نیابد هزینه آن را بسیار زیاد (M) در نظر می‌گیریم.

نکته: اگر چنانچه در مسائل تخصیص تعداد سطرها و ستونها مساوی نباشد (عدم توازن) در آن صورت از سطر یا ستون مجازی با هزینه‌های صفر استفاده می‌کنیم تا توازن حاصل شود.

سلامتی و تعجیل در فرج آقا امام زمان (عج) صلوات

