



تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتریک



۱-۵- تحلیل حساسیت

در مسائل برنامه‌ریزی خطی، پس از رسیدن به جواب بهینه نیاز می‌باشد تا تأثیر تغییرات احتمالی ضرایب و متغیر بر مقدار تابع هدف و جواب بهینه بررسی شود. تحلیل حساسیت شیوه‌ای جهت ارزیابی میزان حساسیت جواب بهینه و تابع هدف در مقابل تغییرات معین در مسئله می‌باشد. این تغییرات معمولاً به سه شکل زیر ظاهر می‌شوند.

- ۱- متغیرهای اساسی و جوابشان تغییر نکرده در نتیجه جواب بهینه مسئله و تابع هدف بدون تغییر باقی می‌مانند.
- ۲- متغیرهای اساسی و جوابشان تغییر کرده و در نتیجه جواب بهینه مسئله و تابع هدف تغییر پیدا می‌کند.
- ۳- متغیرهای اساسی عوض نمی‌شوند ولی مقادیرشان تغییر پیدا می‌نمایند.

۲-۵- حالات مختلف آنالیز حساسیت

- | | |
|---|--|
| ۱- تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف
۲- تغییرات ضرایب متغیرهای پایه‌ای تابع هدف
۳- تغییرات اعداد سمت راست
۴- تغییرات ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای
۵- تغییرات ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای | الف) تأثیر تغییرات ضرایب در جواب بهینه |
|---|--|

- | | |
|--|---|
| ۱- تعیین حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای در تابع هدف
۲- تعیین حدود ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف
۳- تعیین حدود اعداد سمت راست
۴- تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای
۵- تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای | ب) تعیین حدود ضرایب به گونه‌ای که جواب بهینه تغییر نکند |
|--|---|

- | | |
|--|--|
| ۱- اضافه نمودن یک متغیر جدید
۲- حذف یک متغیر غیراساسی (غیرپایه‌ای)
۳- حذف یک متغیر اساسی (پایه‌ای)
۴- اضافه کردن یک محدودیت جدید
۵- حذف یک محدودیت | ج) تأثیر تغییرات ساختاری مسائل برنامه‌ریزی بر جواب بهینه |
|--|--|

۳-۵- تأثیر تغییرات ضرایب در جواب بهینه

۳-۵-۱- تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف

روش اول: با کمک فرمول

$$\begin{aligned}\bar{C}_N &= C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N \\ \bar{C}_j &= C_B \cdot B^{-1} a_j - C_j = z_j - C_j\end{aligned}$$

مسئله حل می‌شود در حالت Max و یا اگر $z_j - C_j \geq 0$ باشد اعداد سطر تابع هدف در جدول سیمپلکس مثبت بوده و تأثیری در جواب ندارد و اگر $z_j - C_j < 0$ باشد در اینصورت آن متغیر ضرایب ورود به پایه را داشته و پس از استاندارد نمودن، جدول سیمپلکس را حل می‌کنیم.

روش دوم: در این روش محدودیت مزدوج متناظر با این متغیر را نوشتیم و مقادیر جواب مسئله ثانویه را

از سطر صفر جدول بهینه اولیه بدست آورده و در محدودیت موردنظر قرار می‌دهیم اگر صدق کرد جواب بهینه فعلی تغییر نکرده در غیراینصورت بهینگی عرض می‌شود.

مثال ۱: مسئله زیر و جدول نهایی آن را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3$$

$$13x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90$$

$$x_i \geq 0$$

Max	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	0	2	5	0	100
x_2	-1	1	3	1	0	20
s_2	16	0	-2	-4	1	10

در مثال ۱ اگر $C_2 = 8$ شود چه تأثیری در جواب بهینه دارد.

$$\bar{C}_2 = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_2 - C_2 = (5 \ 0) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 8 = 15 - 8 = 7$$

$$\bar{a}_2 = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

چون $0 \geq 7 = \bar{C}_2$ پس جواب تغییر نمی‌کند.

$$3y_1 + 10y_2 \geq 8 \Rightarrow 3(5) + 90(0) = 15 > 8$$

در مسئله صدق می‌کند.

۵-۳-۲- تغییرات ضرایب متغیرهای پایه تابع هدف

در مثال ۱ اگر C_2 به عدد ۴ تبدیل شود در جواب بهینه چه تأثیری دارد.

$$C_2 = 5 \rightarrow C_2 = 4$$

$$\bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = [4 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 16 & -2 & -4 \end{bmatrix} - [-5 \ 13 \ 0] = [1 \ -1 \ 4]$$

بدلیل منفی شدن مقادیر \bar{C}_N جدول دیگر بهینه نمی‌باشد بنابراین حل جدول سیمپلکس پس از پاشته گردی ادامه یافته و نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} s_2 = \frac{70}{3} \\ x_2 = \frac{20}{3} \end{cases}, z = \frac{260}{3}$$

z'	1	0	-1	4	0	80
------	---	---	----	---	---	----

بنابراین در این حالت C_B تغییر کرده و باعث تغییر در $-C_j - Z_j$ می‌شود در اینصورت هر متغیری که منفی ترین ضریب را داشت وارد پایه شده در غیر اینصورت جواب تغییر نکرده ولی مقدار Z ممکن است تغییر کند.

نتایج حاصله:

- **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف می‌تواند بر بهینگی مسئله تأثیر داشته باشد.
- **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف بر موجه بودن فضای جواب تأثیری ندارد.
- **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف اگر مقدار تابع هدف و جواب را تغییر دهد در جهت تابع هدف خواهد بود.
- **نکته:** هرگونه تغییرات در جواب با استفاده از سیمپلکس اولیه به جواب نهایی خواهد رسید.

۵-۳-۲- تغییرات اعداد سمت راست

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b$$

$$Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b$$

با توجه به روابط فوق تغییرات لازم داده می‌شود اگر جواب \bar{b} مشیت بود جدول مسئله موجه بوده و مقدار تابع هدف ($Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b$) تغییر پیدا می‌کند اگر \bar{b} منفی بود با کمک سیمپلکس ثانویه به جواب بهینه می‌رسیم.

نتایج حاصله:

- **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر داشته باشد.
- **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) بر بهینگی مسئله تأثیری نخواهد داشت.

نکته: هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) می‌تواند بر مقدار تابع هدف تأثیر داشته باشد.

نکته: هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) در صورت منفی بودن با سیمپلکس ثانویه به جواب نهایی می‌رسد در اینصورت تغییرات تابع هدف در جهت عکس تابع هدف خواهد بود.

۴-۳-۵- تغییرات ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیر پایه‌ای (غیراساسی)

الف) هرگونه تغییر در بردار ضرایب یک متغیر غیر پایه‌ای ($a_j \cdot b_i = B^{-1} \bar{a}_j$) مقدار $\bar{C}_j - C_j = Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j$ را تغییر می‌دهد فلذا اگر در حالت Max مقدار Z باشد جواب بهینه تغییر نمی‌کند (در حالت Min بودن تابع هدف باید، $0 \leq \bar{C}_j$ در غیرانصورت بهینگی بهم خورده و بردار \bar{a}_j وارد پایه می‌شود که در اینصورت ممکن است مقدار Z نیز تغییر کند).
 ب) در روش بعدی محدودیت مزدوج متناظر با متغیر مورد نظر را می‌نویسیم. جوابهای ثانویه را از سطر صفر جدول بهینه اولیه بدست آورده و در محدودیت مورد نظر امتحان می‌کنیم اگر این جوابها صدق کرد جواب بهینه تغییر نمی‌کند در غیرانصورت بهینگی مسئله از بین خواهد رفت.

نتایج حاصله:

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیر پایه‌ای تأثیری بر موجه بودن مسئله ندارد.

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b$$

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیر پایه‌ای ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد.

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیر پایه‌ای ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد. $(Z_j - C_j)$

۴-۳-۶- تغییرات ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای

هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای باعث بهم خوردن ماتریس پایه B و در نتیجه معکوس آن B^{-1} می‌گردد در این حالت تمام پارامترهای \bar{b} و Z و ... تحت تأثیر قرار گرفته و بهتر است که مسئله از ابتدا حل شود. در این شرایط از محدودیت مزدوج نیز نمی‌توان استفاده نمود و بهترین راه حل، استفاده از سیمپلکس اولیه - ثانویه (سیمپلکس ضربدری) می‌باشد.

نتایج حاصله:

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر موجه بودن مسئله تأثیر می‌گذارد.
 $(\bar{b} = B^{-1} \cdot b)$

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر مقدار تابع هدف می‌تواند تأثیر بگذارد.

$$(Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b)$$

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر بهینگی مسئله تأثیر می‌گذارد.

$$(Z_j - C_j) = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j$$

نکات مهم:

- ۱- اگر مسئله از حالت بهینگی خارج گردد از سیمپلکس اولیه جهت حل استفاده می‌شود.
- ۲- اگر مسئله از حالت موجه خارج گردد از سیمپلکس ثانویه جهت حل استفاده می‌شود.
- ۳- اگر مسئله از حالت بهینگی و موجه خارج گردد از سیمپلکس اولیه - ثانویه (ضریبدری) جهت حل استفاده می‌شود.

۵- تعیین حدود ضرایب به گونه‌ای که جواب بهینه تغییر نکند.

قبل از بیان حالتهای مختلف این بخش لازم است یادآوری گردد که می‌توان با کمک حدود ضرایب نیز تأثیر تغییرات ضرایب مطرح شده در بخش الف را بر جواب بهینه بررسی کرد. به این ترتیب اگر مقدار جدید در محدوده مجاز ضریب مورد نظر قرار داشت موجه بودن یا بهینگی تغییر نمی‌کند در غیر اینصورت تغییرات مؤثر خواهد بود.

۶- تعیین حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای در تابع هدف

از آنجائی که هرگونه تغییر در متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف باعث تغییر C_j و در نتیجه $\bar{C}_j = Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j$ می‌شود. بنابراین باید حدود را به گونه‌ای تعریف کرد که در حالت Max مقدار $Z_j - C_j = \bar{C}_j$ باقی بماند.

نکته: اگر بخواهیم حدود تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه را محاسبه کنیم این تغییرات فقط بر روی ضرایب ستونی خود آن متغیر (a_j) موثر بوده و بر بقیه ستونها تأثیری ندارد. همچنین این تغییرات تأثیر بر C_B نخواهد داشت.

شبه قیمت (قیمت سایه یا قیمت ثانویه): مشتق تابع هدف نسبت به مقادیر سمت راست برابر شبه قیمت می باشد در جدول بهینه مسئله اولیه در حالت Max مقدار شبه قیمت، اعداد موجود در زیر متغیرهای کمکی در سطر صفر تابع هدف می باشد (\bar{C}_j مربوط به متغیرهای کمکی) و در جدول بهینه مسئله ثانویه در حالت Min اعداد سمت راست مربوط به \bar{b}_j می باشد پس در حالت بهینگی جداول اولیه (Max) و ثانویه (Min) شبه قیمت بصورت زیر است:

$$\text{ولا} \quad \bar{b}_j \quad \text{مسئله ثانویه} \quad (\bar{C}_j) = (\text{Min}) \quad \text{مسئله اولیه} \quad (\text{Max})$$

و یا:

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots \quad \frac{\partial Z}{\partial b_j} = y_j \quad \text{شبه قیمت (قیمت سایه)}$$

نکته: در حالت بهینه اگر تابع هدف بصورت Z -باشد آنگاه شبه قیمت‌ها در منفی ضرب می شود.

نکته: در جداول غیر از جداول بهینه، به اعداد زیر متغیرهای کمکی در سطر صفر، سهم مشارکت در سود آن منبع می گویند.

نکته: هرگاه میزان موجودی یک منبع به صفر نرسیده باشد، قیمت سایه آن صفر و بر عکس، هنگامی که موجودی یک منبع به صفر رسیده باشد قیمت سایه آن غیر صفر خواهد شد.

نکته: اگر قیمت سایه یک منبع از قیمت بازار آن بیشتر باشد آنگاه تا جایی که این رابطه برقرار نباشد باید میزان استفاده از آن منبع را افزایش دهیم.

نکته: منبعی که قیمت سایه‌ای بیشتری دارد بهتر است افزایش باید و بر عکس.

نکته: در هر مسئله در مراحل مختلف، مشتق تابع هدف نسبت به متغیر Z برابر هزینه تقیل یافته آن متغیر می باشد ($\frac{\partial Z}{\partial x_j} = \bar{C}_j$) هزینه تقیل یافته برای متغیرهای غیرپایه‌ای تعریف شده و ضریب آن متغیر در سطر صفر جدول نهایی می باشد.

نکات اساسی:

- اگر تابع هدف بصورت Max باشد حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه x_j (C'_j) چنین تعریف می شود:

هزینه تقیل یافته متغیر x_j (\bar{C}_j) + ضریب متغیر x_j در تابع هدف اولیه (C_j) \leq

$$\bar{C}_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j \quad \theta \leq \bar{C}_j \quad \text{میزان تغییر}$$

۲- اگر تابع هدف بصورت Min باشد حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه x_j (C'_j) چنین تعریف می‌شود.

هزینه تقلیل یافته متغیر x_j (\bar{C}_j) + ضریب متغیر x_j در تابع هدف اولیه (C_j) $\geq C'_j$
۳- مقدار ضریب متغیر x_j در تابع هدف اولیه (C_j) باید در حدودی که برای این متغیر بدست می‌آوریم، صدق نماید.

۴-۵- تعیین حدود ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف

در این شرایط، پارامتر C_B تغییر کرده و باعث تغییر در ضرایب تمام متغیرهای غیرپایه در تابع هدف $(\bar{C}_j = Z_j - C_j)$ می‌شود بنابراین جهت تعیین حدود تغییرات ضرایب متغیرهای پایه‌ای تابع هدف مقادیر تابع j $= Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_j$ را با دخالت دادن مقدار پارامتر θ جهت کلیه متغیرهای غیرپایه‌ای محاسبه نموده و اشتراک نواحی حاصله، جواب نهایی خواهد شد.

نکات اساسی

۱- اگر تابع هدف بصورت Max باشد حدود ضرایب متغیرهای پایه را با کمک ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای حساب می‌کنیم. در این حالت باید $0 \geq \bar{C}_N$ باشد یعنی:

$$\bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = C_B \cdot \bar{N} - C_N \geq 0 \quad \text{و یا} \quad \bar{C}_N = (C_{B,j} + \theta_j) B^{-1} \cdot N - C_N \geq 0$$

۲- اگر تابع هدف بصورت Min باشد علامت به صورت $0 \leq \bar{C}_N$ خواهد بود.
۳- مقدار ضرایب متغیر x_B در تابع هدف اولیه باید در حدود حاصل شده صدق نماید.

۴-۵- تعیین حدود اعداد سمت راست

برای بدست آوردن حدود تغییرات b باید رابطه $0 \leq b = \bar{b}$ برقرار باشد این وضعیت چه در حالت Max و چه در حالت Min باید صادق باشد سپس با استفاده از اشتراک مقادیر حاصله از رابطه فوق حدود ضرایب بدست می‌آید. در این وضعیت نیز باید مقدار b در جدول اولیه در حدود تعریف شده جدید صدق نماید.

۶-۵- تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای
هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژیکی باعث تغییر a و در نتیجه تغییر در

$\bar{C}_j = Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j$ شده و ممکن است باعث بهم خوردگی بهینگی مسئله گردد
بنابراین حدود به گونه‌ای تعریف می‌شود که بهینگی مسئله حفظ شود.

نکات اساسی:

- ۱- اگرتابع هدف بصورت Z باشد آنگاه $\bar{C}_j \geq 0$ و اگر $\text{Max}(-Z)$ باشد آنگاه $\bar{C}_j \leq 0$
- ۲- اگرتابع هدف بصورت Z باشد آنگاه $\bar{C}_j \leq 0$ و اگر $\text{Min}(-Z)$ باشد آنگاه $\bar{C}_j \geq 0$
- ۳- حدود تغییرات a_{ij} می‌تواند از $-\infty$ تا ∞ باشد با این وجود باید مقدار a_{ij} مسئله اولیه در حدود تعریف شده جدید صدق نماید.

۵.۴.۵- تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای

هرگاه بخواهیم حدود تغییرات ضرایب تکنولوژیکی متغیرهای پایه را بررسی نمائیم باتوجه به اینکه در این حالت ماتریس B و B^{-1} تغییر می‌کند بهتر است که مسئله را از ابتدا حل نمود ضمن اینکه می‌توان با تشکیل B و B^{-1} با وجود پارامتر مجھول صحت روابط $\bar{C}_N \geq 0$ و \bar{b} را بررسی نموده و حدود مشترک را به گونه‌ای بدست آورده که پایه بهینه فعلی عوض نشود.

بعنوان مثال اگر داشته باشیم $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و بخواهیم حدود $\theta = \theta_{21}$ را بدست آوریم داریم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\theta} \\ 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b \quad \bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N$$

۵.۵- تأثیر تغییرات ساختاری مسائل برنامه‌ریزی بر جواب بهینه

۵.۵.۱- اضافه کردن یک متغیر جدید

الف) اگر متغیر جدیدی به مسئله اضافه شود در اینصورت بر سر $\bar{C}_j = Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j$ اثر می‌گذارد فلذا متغیر جدید را به x_j را به ستونهای جدول نهایی اضافه نموده و \bar{C}_j آنرا محاسبه می‌کنیم اگر در حالت $\text{Max} \geq 0$ مقدار \bar{C}_j باشد اضافه نمودن متغیر جدید تأثیری در بهینگی مسئله نداشته و اگر $\bar{C}_j \leq 0$ باشد در اینصورت بهینگی

مسئله بهم می‌خورد و متغیر \bar{z}_j وارد پایه شده و باست حداقل نسبت، متغیر خروجی را یافته و با کمک سیمپلکس معمولی تا رسیدن به جواب بهینه، حل مسئله را ادامه می‌دهیم. در حالتی که تابع هدف بصورت $Min \geq \bar{C}_j$ باشد بهینگی مسئله حفظ و در حالت $0 \leq \bar{C}_j$ مسئله دیگر بهینه نخواهد بود.

ب) در روش بعدی محدودیت مزدوج مربوط به متغیر جدید نوشته شده و جوابهای دوگان را از سطر صفر تابع هدف بدست آورده و در داخل محدودیت امتحان می‌کیم اگر جوابهای دوگان (۳) در محدودیت صدق نمود مسئله بهینه باقی مانده در غیر اینصورت از بهینگی خارج می‌شود.

تتابع حاصله:

☞ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید تأثیری بر موجه بودن مسئله ندارد.

☞ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (در صورت ورود به پایه)

☞ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد

$$(\bar{C}_j = Z_j - C_j)$$

☞ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید می‌تواند باعث بهتر شدن جواب بهینه گردد (نمی‌تواند بدتر کند)

☞ **نکته:** در صورت ورود متغیر جدید به پایه با کمک سیمپلکس اولیه مسئله به جواب بهینه خواهد رسید.

۲-۵-۵- حذف یک متغیر غیراساسی (غیرپایه‌ای)

هرگاه متغیری در پایه (بهینه) نباشد برای حذف آن کافیست فقط ستون آن متغیر را از مسئله و جدول سیمپلکس حذف کیم این حذف هیچ تأثیری بر مقدار تابع هدف، موجه بودن مسئله و یا بهینگی مسئله نخواهد داشت.

۲-۵-۶- حذف یک متغیر اساسی (پایه‌ای)

هرگاه متغیری در پایه باشد ابتدا باید متغیر را از پایه خارج نمود جهت این کار به کمک سیمپلکس ثانویه متغیر موردنظر را بعنوان متغیر خروجی در نظر گرفته و با کمک تست حداقل نسبتها متغیر ورودی را مشخص کرده و وارد پایه می‌نماییم و جدول را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم. سپس

ستون آن متغیر را از جدول سیمپلکس حذف می‌نماییم. در طی مراحل حل جهت رسیدن به جواب بهینه نباید متغیر مورد نظر وارد پایه گردد.

نتایج حاصله:

نکته: حذف یک متغیر اساسی ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تواند بدتر شود).

نکته: حذف یک متغیر اساسی ممکن است بر موجه بودن جوابهای اساسی تأثیر داشته باشد.

نکته: حذف یک متغیر اساسی ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد ($\bar{C}_j = Z_j - C_j$)

۵-۴- اضافه کردن یک محدودیت جدید

در صورت اضافه نمودن یک محدودیت جدید به مسئله، جوابهای بهینه فعلی را در محدودیت جدید قرار می‌دهیم اگر صدق نمود و رابطه برقرار بوده محدودیت جدید تأثیری در مسئله و جواب بهینه نخواهد داشت. در صورتی که جواب بهینه فعلی در محدودیت جدید صدق ننماید آنگاه محدودیت جدید را به شکل کوچکتر مساوی (\leq) تبدیل نموده و با کمک متغیر کمکی محدودیت را به تساوی تبدیل می‌نماییم. حال متغیر کمکی متناظر با محدودیت جدید را به آخر سطر مربوط به متغیرهای اساسی و ستون مربوط به متغیرهای کمکی اضافه کرده، ضرایب محدودیت جدید را وارد جدول نموده و با کمک روش سیمپلکس ثانویه تا رسیدن به جواب بهینه مسئله را ادامه می‌دهیم:

مثال: مسئله زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3$$

$$13x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Max	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	0	2	0	0	100
x_2	-1	1	3	1	0	20
s_2	16	0	-2	-4	1	10

اگر محدودیتی به صورت $5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$ به مسئله اضافه شود چه تأثیری در جواب بهینه خواهد داشت؟

$$2(0) + 3(20) + 5(0) = 60 \not\leq 50 \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 50.$$

(I) اضافه نمودن محدودیت جدید

Max	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	0	0	2	0	0	0	100
x_1	-1	1	3	1	0	0	20
s_2	16	0	-2	-4	1	0	10
s_3	2	3	5	0	0	1	50
z	0	0	2	0	0	0	100
x_2	-1	1	3	1	0	0	20
s_2	16	0	-2	-4	1	0	10
s_3	0	0	-4	-3	0	1	-10

(II) یکه نمودن ستون x_2 و ادامه دادن حل جدول با روش سیمپلکس ثانویه که در آن ۵ از پایه خارج می‌شود.

$$z = 95, \quad x_1 = \frac{0}{2}, \quad x_2 = \frac{20}{2}$$

جواب بهینه:

نتایج حاصله:

نکته: اضافه نمودن یک محدودیت جدید تأثیری بر شرط بهینگی مسئله ندارد.

نکته: اضافه نمودن یک محدودیت جدید می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر داشته باشد.

نکته: اضافه نمودن یک محدودیت جدید ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب

بهینه می‌تواند بدتر شود)

نکته: اضافه نمودن یک محدودیت جدید می‌تواند جواب پایه اساسی را تغییر دهد.

اگر محدودیت بصورت مساوی (=) باشد ممکن است جواب داشته یا نداشته باشیم.

۵۵۵- حذف یک محدودیت

در این شرایط دو حالت اتفاق خواهد افتاد:

۱- در حالت اول متغیر کمکی متناظر با آن محدودیت در پایه قرار ندارد و در نتیجه مقدار آن صفر است. در این صورت آن محدودیت فعال می‌باشد. بنابراین متغیر کمکی متناظر را با روش سیمپلکس معمولی وارد پایه نموده و با کمک تست حداقل نسبتها متغیر دارای شرایط خروج را از پایه خارج می‌کیم سپس سطر و ستون متغیر کمکی متناظر آن محدودیت را از جدول حذف نموده و جدول را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم.

۲- در حالت دوم متغیر کمکی متناظر با آن محدودیت در پایه قرار دارد و در نتیجه مقدار آن صفر نمی‌باشد در این صورت آن محدودیت فعال نبوده و به راحتی می‌توان سطر و ستون متغیر کمکی متناظر آن محدودیت را بدون تغییر در جواب بهینه از جدول سیمپلکس حذف نمود.

نتایج حاصله:

۱- **نکته:** حذف یک محدودیت بر موجه بودن مسئله تأثیری نخواهد داشت.

۲- **نکته:** حذف یک محدودیت ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تراند بهتر شود)

۳- **نکته:** حذف یک محدودیت ممکن است جواب پایه اساسی را تغییر دهد.

۵- قانون صد درصد

چنانچه بخراهم تأثیر تغییرات همزمان چند پارامتر را در مسئله بدانیم می‌توان از قانون ۱۰۰٪ و فرمولهای زیر استفاده نمود.

$$\sum_{C_i} \left(\frac{\text{مقدار تغییرات حاصله}}{\text{حداکثر تغییرات مجاز}} \right) = \text{تغییرات همزمان ضرایب تابع هدف}$$

$$\sum_{b_i} \left(\frac{\text{مقدار تغییرات حاصله}}{\text{حداکثر تغییرات مجاز}} \right) = \text{تغییرات همزمان مقادیر سمت راست}$$

اگر مقدار عبارات فوق کمتر از یک (یا ۱۰۰٪) باشد آنگاه تغییرات همزمان فوق تأثیری بر جواب بهینه نداشته و در غیر اینصورت با کمک سیمپلکس مسئله را ترسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم.

۶- برنامه‌ریزی پارامتریک

در برنامه‌ریزی پارامتریک، مدل علاوه بر اینکه تحت تأثیر پارامترها و متغیرهایی است که در

برنامه‌ریزی خطی تعریف می‌شود، تحت تاثیر پارامتر دیگر که معمولاً با θ نمایش داده می‌شود نیز واقع می‌شود. برنامه‌ریزی پارامتری از نظر عملیاتی و محاسباتی بسیار شبیه آنالیز حساسیت می‌باشد با این تفاوت که در تحلیل حساسیت تغییرات پارامترها را بطور مستقل از یکدیگر مورد بررسی قرار می‌دهیم ولی در برنامه‌ریزی پارامتری تغییر پارامترها بطور همزمان محاسبه شده و تغییرات پیوسته پارامترها در فواصل مشخصی بررسی می‌شود در برنامه‌ریزی خطی پارامتری ۴ حالت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

- ۱- برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف (C_j)
- ۲- برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست (b_i)
- ۳- برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب فنی (a_{ij})
- ۴- برنامه‌ریزی پارامتری همزمان ضرایب تابع هدف، اعداد سمت راست و ضرایب فنی
- ۵- ۱- برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف (C_j)

مدل کلی برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\text{یا}} (\text{Min}) Z(\theta) &= \sum_{j=1}^n (c_j + \alpha_j \theta) x_j \\ \text{s.t.:} & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \text{ یا } = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad , \quad \theta > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن:

θ : متغیری است مثبت که برای نشان دادن اثر تغییرات ناشی از عوامل تولید روی میزان سود فعالیتها بکار می‌رود.

α_j : مقدار ثابتی است که معرف آهنگ نسبی تغییرات تابع هدف می‌باشد و در واقع میزان افزایش یا کاهش فعالیتها را نمایش می‌دهد.

نکته: در برنامه‌ریزی پارامتری α_j تغییرات را نمایش می‌دهد و θ اثر این تغییرات را بر موجه بودن یا بهینه بودن جواب نشان می‌دهد.

الگوریتم حل تغییرات پارامتری C_j

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء $\theta = 0$ حل کرده تا به جواب بهینه برسیم.

گام دوم: با استفاده از روش تحلیل حساسیت، تغییر ضرایب تابع هدف $\Delta C_j = \alpha_j \theta$ را در سطر صفر وارد می‌کنیم.

گام سوم: مقدار θ را آنقدر افزایش می‌دهیم تا ضریب یکی از متغیرهای غیراساسی در سطر صفر منفی شود (و یا θ تا حد اکثر مقدار مجاز تعیین شده افزایش یابد) اگر چنین متغیری وجود نداشت به جواب بهینه رسیده‌ایم.

گام چهارم: متغیری که ضریب آن منفی شده بعنوان متغیر ورودی انتخاب و جواب جدید را محاسبه نموده و به گام سوم برمی‌گردیم.

نکته: هر نمودار ترسیمی $Z(\theta)$ به ازای θ های محاسبه شده در برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف در صورتی که تابع هدف Max باشد بصورت یک خط شکسته محدب (V) بوده و در حالت Min بصورت یک خط شکسته مقعر (Λ) می‌باشد.

نکته: تغییرات پارامتری (C_j) می‌تواند بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد ولی بر موجه بودن مسئله تأثیری نخواهد داشت.

۵-۷-۲- برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست (b_i)

فرم عمومی این مدل بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max} (\text{Min}) Z(\theta) &= \sum_{j=1}^n C_j x_j \\ \text{s.t.} &: \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + \alpha_i \theta & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 & \theta > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

الگوریتم حل تغییرات پارامتری b_i :

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء $\theta = 0$ حل نموده و جواب بهینه را بدست می‌آوریم.

گام دوم: با استفاده از تحلیل حساسیت اثر تغییرات در مقادیر سمت راست محدودیتها ($\Delta b_i = \alpha_i \theta$) را در ستون سمت راست جدول محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: مقدار θ را آنقدر افزایش می‌دهیم (یا به اندازه حد اکثر مقدار مجاز تعیین شده) تا مقدار یکی از متغیرهای اساسی در ستون سمت راست منفی شود. اگر چنین متغیری یافت نشد به جواب بهینه

رسیده‌ایم.

گام چهارم: متغیر منفی را بعنوان متغیر خروجی انتخاب و با روش سیمپلکس ثانویه جواب جدید را بدست آورده و به گام سوم باز می‌گردیم.

نکته: نمودار ترسیمی $Z(\theta)$ به ازاء θ های محاسبه شده در برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست وقتی که تابع هدف بصورت Max باشد یک خط شکسته مقعر (V) بوده و در حالت بصورت یک خط شکسته محدب (\wedge) می‌باشد.

نکته: اعمال تغییرات پارامتری θ می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر بگذارد ولی تأثیری بر بهینگی نخواهد داشت.

۵-۳- برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب فنی (a_{ij})

فرم عمومی این مدل چنین است.

$$\text{Max} (\text{Min}) Z(\theta) = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

$$S.t : \begin{cases} \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \alpha_i \theta) \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & \theta > 0 \end{cases}$$

در این حالت ابتدا مسئله با $\theta = 0$ حل نموده تا جواب بهینه بدست آید سپس با استفاده از روش تحلیل حساسیت $\frac{\partial}{\partial \theta}$ های جدید و $\frac{\partial}{\partial \theta}$ های جدید را بدست می‌آوریم. برای متغیرهای غیراساسی مسئله وقتی بهینه می‌باشد که $\frac{\partial}{\partial \theta}$ های مثبت باشد. برای متغیرهای اساسی بعد از بدست آوردن $\frac{\partial}{\partial \theta}$ های جدید ابتدا بردارهای مربوط به متغیرهای اساسی را یکه کرده و سپس بهینگی یا موجه بودن مسئله را بررسی نموده و با کمک سیمپلکس ثانویه (غیرموجه بودن مقادیر سمت راست) یا سیمپلکس اولیه (غیربهینه بودن سطر صفر) مسئله را حل می‌کنیم.

نکته: اعمال تغییرات پارامتری ضرایب فنی (a_{ij}) می‌تواند بر موجه بودن یا بهینگی مسئله تأثیرگذار باشد.

۵-۴- برنامه‌ریزی پارامتری همزمان ضرایب تابع هدف، اعداد سمت راست و ضرایب فنی

فرم عمومی این مدل بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$(\text{Min}) Z(\theta) = \sum_{j=1}^n (C_j + \alpha_j \theta) x_j$$

$$S.t : \begin{cases} \sum_{j=1}^n (a_j + \alpha_j \theta)x_j \leq b_i + \alpha_i \theta \\ x_j \geq 0, \quad \theta > 0 \end{cases}$$

الگوریتم حل بصورت زیر می باشد:

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء $\theta = 0$ حل نموده تا جواب بهینه حاصل شود.
با استفاده از تحلیل حساسیت اثر تغییرات Δa_{ij} , Δb_i , Δc_j را محاسبه نموده و در جدول
نهایی اعمال می کنیم.

مقدار θ را آنقدر افزایش می دهیم (یا به اندازه حد اکثر مقدار مجاز تعیین شده) تا مقدار یکی از
متغیرهای اساسی در ستون سمت راست و یا ضریب یک متغیر غیر اساسی در سطر صفر منفی گردد.
اگر چنین متغیری پیدا نشد به جواب بهینه رسیده ایم.

از این متغیر بعنوان متغیر اساسی خروجی (در صورتی که یکی از اعداد سمت راست منفی گردد) یا
متغیر اساسی ورودی (در صورتی که مقدار یکی از متغیرهای غیر اساسی در سطر صفر منفی گردد)
استفاده نموده و به ترتیب با روش سیمپلکس ثانویه یا اولیه جواب جدید را بدست آورده و به گام سوم
باز می گردیم.

نتیجه: اعمال تغییرات پارامتری همزمان C_j و b_i و a_{ij} می تواند بر موجه بودن یا بهینگی مسئله
تأثیرگذار باشد

سلامتی و تعییل در فرج آقا امام زمان (عج) صلوات

