دوگان (ثانویه) مسایل برنامه‌ریزی خطی

۴

۴ـ۱ـ تعاریف و مفاهیم

در ارتباط با هر مسئله برنامه‌ریزی خطی اولیه *(primal)* معادل آن به نام مسئله مزدوج (دوگان ـ همتا ـ همزاد، *Dual* یا ثانویه) وجود دارد به‌طوری که این مسئله از ترانهاده کردن کل ماتریس ضرایب با تغییرات جزئی دیگر حاصل می‌شود.

۴ـ۱ـ۱ـخواص مسئله ثانویه

۱ـ اعداد سمت راست می‌توانند منفی باشند.

۲ـ جواب اولیه و ثانویه بطور همزمان در جدول نهایی وجود دارد.

۳ـ در این روش بجای استفاده از متغیر مصنوعی می‌توان از محدودیت مصنوعی استفاده نمود.

۴ـ۱ـ۲ـدلایل استفاده از مسئله ثانویه

۱ـ کمتر شدن مقدار محاسبات (تعداد مراحل عملیات بستگی به تعداد محدودیتها دارد نه تعداد متغیرها)

۲ـ جلوگیری از به کار بردن متغیرهای مصنوعی

۳ـ تعبیر اقتصادی مسئله ثانویه در مسئله اولیه b_i نشان دهنده مقدار منابع در دسترس، و متغیرهای

مزدوج (y_i ها) نشان دهنده ارزش منبع iام و سهم قابل وصول فعالیتها از منابع iام می‌باشد.

۴ـ تجزیه و تحلیل حساسیت

۵ـ نقطه مبدأ مختصات، جزء ناحیهٔ جواب نباشد.

۴ـ۲ـ روابط متقابل مسئله اولیه و ثانویه

یک مسئله ثانویه را به راحتی می‌توان با اطلاعات مسئله اولیه نمایش داد.

مسئله اولیه (ثانویه)		مسئله ثانویه (اولیه)	
تابع هدف	Max	Min	تابع هدف
ضریب تابع	مقادیر ضرایب تابع هدف	مقادیر سمت راست	سمت راست
سمت راست	مقادیر سمت راست	مقادیر ضرایب تابع هدف	ضریب تابع هدف
محدودیت	تعداد محدودیت (m) $\le$ $\ge$ $=$	تعداد متغیر (n) $\ge$ $\le$ آزاد در علامت	متغیر
متغیر	تعداد متغیرها (n) $\ge$ $\le$ آزاد در علامت	تعداد محدودیتها (m) $\ge$ $\le$ $=$	محدودیت
ضرایب محدودیتها	ترانسپوز ماتریس ضرایب	ماتریس ضرایب	ضرایب محدودیتها
متغیرهای پایه	n متغیر اساسی m متغیر غیراساسی	m متغیر اساسی n متغیر غیراساسی	متغیرهای پایه

بنابراین مسائل اولیه و ثانویه به صورت مدل‌های زیر نمایش داده می‌شوند:

مسئله ثانویه	مسئله اولیه
$min\ Y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$	$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$
$st: \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geq C_j \\ y_i \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \end{cases}$	$st: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_j \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m \end{cases}$

تذکر: علامت متغیرها از روی محدودیتها و علامت محدودیتها از روی متغیرها تعیین می‌شود.

☜ **نکته:** مزدوج مزدوج هر برنامه‌ریزی خطی خود آن مسئله می‌باشد.

☜ **تذکر:** تعداد محدودیتهای مسئله اولیه برابر تعداد متغیرهای مسئله ثانویه و برعکس می‌باشد.

☜ **نکته:** مقادیر متغیرهای پایه در هر مرحله از جدول مسئله اولیه در تمام محدودیتها صدق می‌کند، ولی در مسئله ثانویه این چنین نبوده و فقط در جدول نهایی به این حالت می‌رسیم. در سایر موارد متغیرها در محدودیتها صدق نمی‌کند. به عبارت دیگر ثانویه اولین جواب قابل قبولی که حاصل می‌شود جواب بهینه است.

☜ **نکته:** در طی مراحل سیمپلکس مسئله اولیه مقدار تابع هدف با تابع هدف هم جهت است ولی در مسئله ثانویه در خلاف جهت تابع هدف حرکت می‌کنیم. (در واقع در حالت *Max* تابع هدف از مقدارکم شروع نموده و به بهینه می‌رسد ولی در حالت *Min* تابع هدف از مقدار زیاد شروع و به حالت بهینه می‌رسد.)

☜ **نکته:** در سیمپلکس مسئله اولیه عنصر لولا همواره مثبت می‌باشد ولی در سیمپلکس مسئله ثانویه عنصر لولا منفی است.

☜ **نکته:** در سیمپلکس مسئله اولیه ابتدا متغیر ورودی و سپس خروجی تعیین می‌شود، در صورتی که در سیمپلکس ثانویه دقیقاً برعکس این عمل اتفاق می‌افتد.

☜ **نکته:** در مسئله اولیه زمانی که مسئله، جواب اولیه قابل قبول ندارد از متغیر مصنوعی استفاده می‌شود، در صورتی که در مسئله ثانویه زمانی‌که مسئله جواب ثانویه قابل قبول ندارد از محدودیت مصنوعی استفاده می‌شود تا به جواب قابل قبول مطلوب دست یابیم.

☜ **نکته:** بکارگیری متغیرهای مصنوعی در مسئله اولیه معادل بکارگیری محدودیت مصنوعی در

مسئله ثانویه است.

☜ **نکته:** تعداد گوشه‌های هر دو مسئله با هم برابراست (زیرا m و n فقط جایشان عوض شده است)

یعنی $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

☜ **نکته:** هر جواب اساسی (گوشه) بهینه در مسئله اولیه متناظر با یک جواب اساسی (گوشه) بهینه در مسئله ثانویه است و مشخصه آن داشتن مقادیر تابع هدف برابر است.

☜ **نکته:** هر دو گوشه متناظر نمی‌توانند در دو مسئله اولیه و ثانویه موجه باشند مگر اینکه آن جواب اساسی یا گوشه بهینه باشد.

☜ **نکته:** مقدار تابع هدف بهینه در هر دو مسئله اولیه و ثانویه برابر می‌باشد.

☜ **نکته:** باتوجه به جداول سیمپلکس اولیه، برای مسئله ثانویه مقدار متغیرهای اصلی ، در سطر صفر در زیر متغیرهای کمکی جدول سیمپلکس اولیه، و مقدار متغیرهای کمکی ، در سطر صفر در زیر متغیرهای اصلی جدول سیمپلکس اولیه قرار دارد.

۴ـ۳ـ قضایای مسئله دوگان

قضیه ۱ : ثانویه مسئله ثانویه، مسئله اولیه می‌باشد.

قضیه ۲ (قضیه ضعیف دوگان) : اگر x^* جواب قابل قبول برای مسئله اولیه با تابع هدف Max و y^* جواب قابل قبول برای مسئله ثانویه با تابع هدف Min باشد، رابطه زیر همواره برقرار است:

مقدار تابع هدف ثانویه $(Min) \leq$ مقدار تابع هدف اولیه $(Max) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Cx^* \leq by^* \\ x^* \leq y^* \end{matrix} \right\}$

حال اگر مسئله اولیه Min و مسئله ثانویه Max باشد علامتها عوض خواهد شد.

نتایج قضیه ضعیف دوگان

۱ـ مقدار تابع هدف مسئله Min به ازای هر جواب قابل قبول این مسئله، حد بالایی برای بیشترین مقدار تابع هدف مسئله بیشینه سازی می‌باشد.

۲ـ مقدار تابع هدف مسئله Max به ازای هر جواب قابل قبول این مسئله ، حد پایینی برای کمترین مقدار تابع هدف مسئله کمینه سازی می‌باشد.

۳ـ اگر مسئله اولیه (Max) جواب قابل قبول داشته باشد و به ازای این جواب مقدار تابع هدف نامحدود باشد ($Z \to \infty$) در این صورت مسئله ثانویه نمی‌تواند جواب قابل قبولی داشته باشد.

۴ـ اگر مسئله ثانویه (Min) دارای جواب قابل قبول باشد و به ازای این جواب، مقدار تابع هدف نامحدود باشد ($Y \to \infty$) در اینصورت مسئله اولیه نمی‌تواند جواب قابل قبول داشته باشد.

۵ـ اگر یکی از مسائل اولیه یا ثانویه جواب بهینه نامحدود داشته باشد در این‌صورت مسئله دیگر جواب قابل قبول نخواهد داشت.

۶ـ اگر مسئله اولیه یا ثانویه جواب قابل قبول نداشته باشد، مسئله دیگر ممکن است جواب قابل نداشته باشد و یا اینکه مقدار تابع هدف نامحدود داشته باشد.

۷ـ اگر مسئله اولیه جواب قابل قبول داشته باشد ولی ثانویه جواب قابل قبول نداشته باشد آنگاه مسئله اولیه نامحدود می‌باشد.

۸ـ اگر مسئله ثانویه جواب قابل قبول داشته باشد ولی اولیه جواب قابل قبول نداشته باشد آنگاه مسئله ثانویه نامحدود می‌باشد.

قضیه ۳ (قضیه معیار بهینگی) : اگر x^* و y^* جوابهای قابل قبول مسئله اولیه و ثانویه باشند به گونه‌ای که مقادیر تابع هدف این دو مسئله به ازای این جوابها با یکدیگر مساوی باشند ($cx^* = by^*$) در اینصورت x^* , y^* جوابهای بهینه این دو مسئله می‌باشند.

نتیجه قضیه معیار بهینگی: شرط لازم و کافی جهت بهینه بودن جواب مسئله اولیه و ثانویه اینست که این جوابها قابل قبول بوده و به ازای آنها مقادیر تابع هدف هر دو مسئله برابر گردد.

قضیه ۴ (قضیه قوی دوگان): هرگاه x^* , y^* جوابهای قابل قبول دو مسئله اولیه و ثانویه باشند آنگاه هردو مسئله دارای جواب بهینه بوده و رابطه $cx^* = by^*$ برقرار است.

نتیجه قضیه قوی دوگان: هرگاه هریک از مسائل اولیه یا ثانویه جواب بهینه داشته باشد، دیگری نیز جواب بهینه خواهد داشت.

قضیه ۵ (قضیه اساسی دوگان): در مسائل برنامه‌ریزی خطی اولیه و ثانویه، یکی از سه حالت زیر بطورکلی رخ می‌دهد:

۱ـ هر دو مسئله جواب بهینه محدود دارند، به‌طوری که $cx^* = by^*$ برقرار است و در آن x^* , y^*

به ترتیب جوابهای بهینه مسائل اولیه و ثانویه می‌باشند.

۲ـ هرگاه مقدار تابع هدف یکی از مسائل نامحدود باشد، در اینصورت مسئله دیگر جواب قابل قبول نخواهد داشت ولی عکس این قضیه همواره برقرار نمی‌باشد.

۳ـ هر دو مسئله جواب قابل قبول ندارند.

قضیه ۶ (قضیه تعدّد و انحطاط): اگر هرکدام از مسائل اولیه یا ثانویه برنامه‌ریزی خطی جواب بهینه چندگانه داشته باشد، در اینصورت مسائل دیگر دارای جواب بهینه تباهیده (منحط) خواهد بود و برعکس.

قضیه ۷ (قضیه مکمل زاید):

مسئله اولیه و ثانویه را بصورت زیر در نظر بگیرید:

مسئله ثانویه	مسئله اولیه
$Min\ Y = yb$	$Max\ Z = cx$
$S.t: yA \geq c$	$S.t: Ax \leq b$
$y \geq 0$	$x \geq 0$

فرض کنید x^* , y^* به ترتیب جوابهای قابل قبول برای مسئله اولیه و ثانویه باشند، آنگاه x^* , y^* جواب بهینه می‌باشند اگر و فقط اگر:

$$(y^*A - c)x^* + y^*(b - Ax^*) = 0$$

و در حالت بسط یافته داریم:

$$(y^*a_j - c_j)x_j^* + y_i^*(b_i - a^i x^*) = 0 \qquad (I) \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

این قضیه نشان می‌دهد که حداقل یکی از دو جمله در هر بسط باید صفر باشد بنابراین:

$$\text{اگر} \begin{cases} x_j^* > 0 \Rightarrow y^*a_j = c_j \\ y^*a_j < c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \\ y_i^* > 0 \Rightarrow a^i x^* = b_i \\ a^i x^* > b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \end{cases}$$

نکته: از قضیه فوق نتیجه می‌شود که اگر متغیری در یک مسئله مثبت باشد آنوقت محدودیت

متناظر آن در مسئله دیگر فعال است و اگر یک محدودیت در یک مسئله فعال نباشد آن وقت متغیر متناظر آن در مسئله دیگر باید صفر باشد. حال اگر $s_i = a^i x^* - b_i \geq ۰$ و $s_j' = c_j - y^* a_j \geq ۰$ به ترتیب متغیرهای کمکی مسئله اولیه و ثانویه باشد از معادله (I) داریم:

$$s_j'^* \times x_j^* = ۰ \qquad j = ۱,\dots,n$$

$$y_i^* \times s_i^* = ۰ \qquad i = ۱,\dots,m$$

نتایج حاصل از قضیه مکمل زاید

۱ـ در جواب بهینه مقدار $x^* = y^*$ می‌باشد.

۲ـ در صورتی‌که متغیر مسئله اولیه (x_j) مثبت باشد (x_j در پایه باشد) آنگاه محدودیت متناظر در مسئله ثانویه بصورت مساوی (محدودیت فعال) برآورده می‌شود.

۳ـ در صورتی‌که محدودیت مسئله اولیه بصورت نامساوی مطلق برآورده شود ($S_i > ۰$ در پایه باشد) آنگاه متغیر متناظر در مسئله ثانویه صفر است $(y_i = ۰)$

	s_i	
z	y_i	
s_i	۱	

۴ـ در صورتی‌که متغیر مسئله ثانویه (y_i) مثبت باشد (y_i در پایه باشد) آنگاه محدودیت متناظر در مسئله اولیه بصورت مساوی $(S_i = ۰)$ برآورده می‌شود.

۵ـ در صورتی‌که محدودیت مسئله ثانویه بصورت نامساوی مطلق برآورده شود ($S_j' > ۰$ در پایه) آنگاه متغیر متناظر در مسئله اولیه صفر است $(X_j = ۰)$.

۶ـ هر متغیر تصمیم در اولیه با یک متغیر کمکی در ثانویه ارتباط دارد و برعکس هرمتغیر کمکی در اولیه با یک متغیر تصمیم در ثانویه در ارتباط می‌باشد. $X_j \cdot S_j' = ۰ \quad , \quad S_i \cdot y_i = ۰$

که در آن x_j ، y_i متغیرهای تصمیم اولیه و ثانویه S_i , S_j' متغیرهای کمکی به ترتیب اولیه و ثانویه می‌باشد.

۷ـ هر متغیر اساسی در اولیه با یک متغیر غیراساسی در ثانویه و برعکس هر متغیر غیراساسی در اولیه با یک متغیر اساسی در ثانویه در ارتباط است.

مثال: اگر حل بهینه مسئله‌ای بصورت زیر باشد جواب بهینه مسئله مزدوج آنرا بدون استفاده از جدول سیمپلکس بدست آورید.

$$Max\ Z = 0/75x_1 - 20x_2 + 0/5x_3 - 6x_4$$

$$0/25x_1 + 8x_2 + x_3 - 9x_4 \geq 0 \qquad x_1^* = x_3^* = 1$$

$$-0/5x_1 + 12x_2 + 0/5x_3 - 3x_4 = 0 \qquad x_2^* = x_4^* = 0$$

$$x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ابتدا مزدوج مسئله فوق را بدست می‌آوریم:

$$Min\ Y = y_3$$

$$0/25y_1 - 0/5y_2 \geq 0/75$$

$$8y_1 + 12y_2 \geq -20$$

$$y_1 + 0/5y_2 + y_3 \geq 0/5$$

$$-9y_1 - 3y_2 \geq -6$$

$y_1 \leq 0$, y_2 آزاد در علامت , $y_3 \geq 0$

$$Max\ Z = 0/75(1) - 20(0) + 0/5(1) - 6(0) = 1/25$$

در حالت بهینه داریم:

$$Max\ Z = Min\ Y = y_3 = 1/25 \Rightarrow y_3 = 1/25$$

حال محدودیت اول را برآورد می‌کنیم.

$$0/25x_1 + 8x_2 + x_3 - 9x_4 - s_1 = 0 \qquad X = (1, 0, 1, 0)$$

$$0/25 + 1 - s_1 = 0 \Rightarrow s_i = 1/25$$

بنابراین محدودیت اول بصورت نامساوی مطلق می‌باشد که در آن $S_1 = 1/25 > 0$ در پایه قرار دارد.
پس متغیر متناظر با آن در مسئله ثانویه صفر می‌باشد $(y_1 = 0)$ یعنی:

محدودیت اول بصورت نامساوی $(S_1 = 1/25) \Rightarrow y_1 = 0$

$(S_2 = 0) \Rightarrow y_2 \neq 0$ محدودیت دوم بصورت مساوی

$(S_3 = 0) \Rightarrow y_3 \neq 0$ محدودیت سوم بصورت مساوی

از طرفی چون متغیرهای x_1 و x_3 در مسئله اولیه مخالف صفر می‌باشند پس محدودیتهای متناظر در مسئله ثانویه محدودیت اول و سوم بصورت مساوی نوشته می‌شود. و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \neq 0 \Rightarrow 0/25 y_1 - 0/5 y_2 = 0/75 \\ x_3 \neq 0 \Rightarrow y_1 + 0/5 y_2 + y_3 = 0/5 \end{array}\right\} \xrightarrow{y_1 = 0} y_2 = -1/5 \ , \ y_3 = 1/25$$

۴ـ۴ـ روابط متقابل جوابهای مسئله اولیه و ثانویه

در مسئله اولیه و ثانویه بطور خلاصه روابط زیر برقرار می‌باشد.

مسئله اولیه		مسئله ثانویه
جواب بهینه محدود	$\longleftrightarrow$	جواب بهینه محدود
جواب بهینه چندگانه	$\longleftrightarrow$	جواب بهینه منحط
جواب بهینه منحط	$\longleftrightarrow$	جواب بهینه چندگانه
مقدار تابع هدف نامحدود $(Z = \infty)$	$\longleftrightarrow$	بدون جواب موجه
بدون جواب موجه	$\longrightarrow$	بدون جواب موجه
	$\longrightarrow$	تابع هدف نامحدود $(Z = \infty)$

۴ـ ۵ ـ روابط متقابل جداول مسئله اولیه و ثانویه

جداول نهایی و بهینه سیمپلکس یک مسئله اولیه و ثانویه دارای ارتباط متقابل مفهوم‌دار با یکدیگر می‌باشند.

۱ـ هر متغیر اصلی در اولیه x_i به ترتیب، متناسب با یک متغیر کمکی در ثانویه s_i' است. و برعکس هر y_j متناسب با یک s_j می‌باشد.

۲ـ اعداد سمت راست مسئله اولیه، مقدار ضرایب متغیرهای غیراساسی در سطر Y جدول سیمپلکس مسئله ثانویه است و برعکس.

۳ـ اعداد غیرصفر سطر Z در مسئله اولیه، مقدار متغیرهای اساسی در جدول ثانویه است و برعکس.

۴ـ مقدار متغیرهای تصمیم مسئله ثانویه در زیر سطر Y برابر قرینه و ترانسپوز (ترانهاده) مقدار متغیرهای غیراساسی در زیر سطر Z در مسئله اولیه است.

جدول نهایی مسئله اولیه (Max)		جدول نهایی مسئله ثانویه (Min)
اولیه $-A_N^T$	⟷	ثانویه A_N
اولیه b_i	⟷	ثانویه C_N
مقدار C_N	⟷	ثانویه b_i
مقدار Z	⟶	مقدار Y

جدول نهایی مسئله اولیه

	ثانویه	s'_1	s'_2	y_1	y_2	
متغیرهای تصمیم	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	۱	۰	۳۰	۰	۴۰	۲۰۰
s_1	۰	۰	-۴	۱	-۲	۲
x_1	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$

جدول نهایی مسئله ثانویه

	اولیه	s_1	s_2	x_1	x_2	
متغیرهای اساسی	z	y_1	y_2	s'_1	s'_2	RHS
Y	۱	۲	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	+۲۰۰
s'_2	۰	۴	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۱	۳۰
y_2	۰	۲	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۴۰

یک مسئله به ۴ روش قابل حل می‌باشد:

۱ـ مسئله اولیه به روش سیمپلکس اولیه

۲ـ مسئله اولیه به روش سیمپلکس ثانویه

۳ـ مسئله ثانویه به روش سیمپلکس اولیه

۴ـ مسئله ثانویه به روش سیمپلکس ثانویه

حال نکات زیر در رابطه با روشهای فوق قابل ذکر می‌باشد.

☜ **نکته:** تعداد مراحل حل یک مسئله اولیه برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس اولیه دقیقاً برابر تعداد مراحل حل ثانویه آن مسئله (دوگان) به روش سیمپلکس ثانویه می‌باشد. یعنی:

ثانویه به روش ثانویه ⟷ اولیه به روش اولیه

☜ **نکته:** تعداد مراحل حل یک مسئله اولیه به روش سیمپلکس ثانویه دقیقاً برابر تعداد مراحل حل ثانویه آن مسئله (دوگان) به روش سیمپلکس اولیه می‌باشد. یعنی:

اولیه به روش ثانویه ⟷ ثانویه به روش اولیه

۴ـ۶ـ روابط متقابل ماتریس مسئله اولیه و ثانویه

اگر مسئله برنامه‌ریزی اولیه بصورت زیر بیان شود.

$Max\ Z = Cx$ (مسئله اولیه)

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

در اینصورت مسئله ثانویه چنین بیان خواهد شد.

$Min\ Y = b^T.y$ (مسئله اولیه)

$A^T y \geq C^T$

$y \geq 0$

که در آن b^T، A^T ، C^T ترانسپوز یا ترانهاده b، A و C می‌باشند بنابراین روابط زیر برقرار می‌باشد.

(۱) $X_B = \bar{b} = B^{-1}.b$

$$(۲)\; y = C_B . B^{-1}$$

$$(۳)\; \begin{cases} \bar{a}_j = B^{-1} . a_j \\ \bar{N} = B^{-1} . N \end{cases}$$

$$(۴)\; \begin{cases} \bar{C}_j = C_B . B^{-1} . a_j - C_j = y . a_j - C_j = C_B . \bar{a}_j - C_j \\ \bar{C}_N = C_B . B^{-1} . N - C_N = y . N - C_N = C_B . \bar{N} - C_N \end{cases}$$

$$(۵)\; Z = C_B . B^{-1} . b = yb = C_B . \bar{b}$$

نکته: $-y_{ij} = \frac{\partial X_{Bi}}{\partial x_j}$ که در آن x_j متغیر غیرپایه‌ای و x_{B_i} متغیر پایه‌ای خواهد بود.

۴ـ۷ـ تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مساله ثانویه، استفاده از مفاهیم اقتصادی حاصل از آن می‌باشد. از آنجائی‌که اعداد هر ستون مفاهیم مرتبط در مورد یک متغیر تصمیم را بیان می‌کند معمولاً تفسیر اقتصادی بصورت ستونی انجام می‌پذیرد.

در جداول سیمپلکس در صورتی‌که اعداد مثبت در سطری قرار گیرند که متغیر اساسی مربوط به آن سطر، متغیر کمکی باشد، به مفهوم میزان استفاده از آن منبع برای تولید یک واحد از محصولی (با افزایش یک واحد متغیر ورودی) است که در بالای ستون این عدد قرار گرفته است. در صورتی که متغیر اساسی مربوط به آن سطر متغیر تصمیم باشد به معنی کاهش آن متغیر اساسی است که در ازاء افزایش یک واحد از متغیر ورودی صورت می‌پذیرد و برعکس، اعداد منفی، افزایش منبع (در مورد متغیرهای کمکی) و یا افزایش تولید (در مورد متغیرهای تصمیم) است.

۴ـ۷ـ۱ـ تعریف شبه قیمت (قیمت سایه، قیمت مجازی، *Dual Price*)

شبه قیمت عبارتست از میزان تغییرات تابع هدف به ازای یک واحد افزایش در یکی از مقادیر سمت راست که برابر مقدار متغیر ثانویه متناظر آن محدودیت است (y_i). قیمت‌های سایه یا قیمت‌های ثانویه بیانگر ارزش اقتصادی هر واحد سمت راست می‌باشد. اگر اعداد سمت راست نشان دهنده میزان منابع موجود باشد، قیمت سایه منعکس‌کننده ارزش اقتصادی هر واحد از منبع می‌باشد.

نکته: در جدول سیمپلکس جوابهای اساسی در اولیه مقدار قیمت سایه برای ثانویه است و برعکس.

☜ **نکته:** جدول سیمپلکس وقتی بهینه است که: هزینه نهایی = درآمد نهایی

☜ **نکته:** از حاصلضرب قیمتهای سایه (y_i) در مقدار منابع، مقدار Z^* حاصل می‌شود. و

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^*$$

۴-۷-۲-هزینه تقلیل یافته

عبارتست از میزان تغییرات تابع هدف به ازای یک واحد تولید از یکی از متغیرهای غیرپایه بهینه که برابر ضریب آن متغیر در سطر هدف جدول بهینه می‌باشد.
یعنی به ازاء هر واحد باید ۳ واحد ضرر بدهیم.

	x_i	RHS
Z	۳	
	۱	
	۵	
	۷	

☜ **نکته:** متغیرهای کمکی در حالت Min (ثانویه) به معنی میزان هزینه فرصت از دست رفته می‌باشد. در این شرایط بهترین حالت تساوی می‌باشد.

☜ **نکته:** متغیرهای کمکی در حالت Max (اولیه) به معنی میزان منابع باقی مانده است.

☜ **نکته:** y_i^* ها در جدول نهایی سیمپلکس اولیه در سطر Z و در زیر متغیرهای کمکی (متغیرهای اساسی جدول ابتدایی) قرار دارد.

☜ **نکته:** اگر بخواهیم از منابعی افزایش تولید داشته باشیم، آنهایی را افزایش می‌دهیم که دارای قیمت سایه‌ای (y_i های متناظر) بیشتر باشد.

☜ **نکته:** در مسائلی که با روش M بزرگ حل شده‌اند برای بدست آوردن قیمت‌های سایه‌ای (y)، در عناصر سطر صفر زیر متغیرهای شروع مسئله مقدار M را صفر قرار داده که در نتیجه قیمت سایه‌ای حاصل می‌شود.

۴-۸- روش حل سیمپلکس ثانویه

روش سیمپلکس ثانویه عموماً موقعی بکار می‌رود که همه ضرایب متغیرها در سطر تابع هدف

غیرمنفی باشد (شرط بهین) ولی اعداد سمت راست مقادیر منفی داشته باشد (غیر موجه). جهت این کارگامهای زیر پیموده می‌شود:

۱ـ تابع هدف را بصورت Max تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز، ضرب عدد ۱− در طرفین)

۲ـ محدودیتها را به شکل ≤ (ک.م) تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز با ضرب عدد ۱− در طرفین)

۳ـ با اضافه نمودن متغیرهای کمکی S_i به محدودیتها آنها را به شکل مساوی تبدیل می‌کنیم.

۴ـ مسئله را وارد جدول سیمپلکس می‌نمائیم.

۵ـ منفی‌ترین عدد سمت راست (b_i) را بعنوان متغیر خروجی انتخاب می‌کنیم. سطر مذکور سطر لولا نامیده می‌شود.

☜ **نکته:** اگر تمام اعداد سمت راست دارای مقادیر غیرمنفی باشد جواب اساسی فعلی موجه و بهینه می‌باشد.

☜ **نکته:** اگر اعداد سمت راست (b_i)، جهت ورود مساوی باشند به دلخواه یکی را انتخاب می‌کنیم.

۶ـ متغیر ورودی با تقسیم اعداد سطر صفر بر اعداد منفی سطر لولا و انتخاب کوچکترین قدرمطلق عدد حاصله بدست می‌آید. ستون حاصله را ستون لولا می‌نامیم. بطور خلاصه داریم:

$$\theta = Min\left\{\left|\frac{C_j}{a_{ij}}\right| \ ; \ a_{ij} < 0\right\} \quad \text{(متغیر ورودی)}$$

که در آن c_j اعداد سطر صفر و a_{ij} عناصر سطر لولا می‌باشد.

☜ **نکته:** اگر تمام عناصر سطر لولا غیرمنفی باشد، در اینصورت مسئله فاقد منطقه موجه بوده و جواب ندارد. در اینصورت مسئله اولیه دارای جواب نامحدود می‌باشد.

☜ **نکته:** اگر شرایط مساوی جهت انتخاب متغیر ورودی داشته باشیم مسئله دارای جواب چندگانه می‌باشد. در این حالت مسئله اولیه دارای جواب منحط می‌باشد.

☜ **نکته:** در سیمپلکس ثانویه هدف از آزمون نسبت، حفظ شرط بهینگی در جدول بعدی می‌باشد.

۴ـ۹ـ مقایسه روش سیمپلکس معمولی و سیمپلکس ثانویه

سیمپلکس معمولی	سیمپلکس ثانویه
تابع هدف بصورت Max	تابع هدف بصورت Max
محدودیتها بصورت $\leq$	محدودیتها بصورت $\leq$
$RHS > 0$	$C_j > 0$
ابتدا متغیر ورودی (ستون لولا)	ابتدا متغیر خروجی (سطر لولا)
منفی‌ترین ضریب سطر صفر	منفی‌ترین ضریب در RHS
خارج قسمت RHS به ستون مثبت لولا	خارج قسمت ضرایب سطر صفر به سطر منفی لولا
حداقل نسبت	حداقل قدر مطلق نسبت
عدد لولا همیشه بزرگتر از صفر	عدد لولا همیشه کوچکتر از صفر
اگر تمام عناصر ستون لولا غیرمثبت باشد مسئله نامحدود می‌باشد	اگر همه عناصر سطر لولا غیرمنفی باشد مسئله غیرقابل قبول است.

۴ـ۱۰ـ نوع خاص سیمپلکس ثانویه (محدودیت مصنوعی)

اگر چنانچه در جدول سیمپلکس ثانویه شرط بهینگی نقض شده باشد (یعنی در سطر صفر جدول پس از استاندارد نمودن مسئله و تبدیل به Max مقدار منفی وجود داشته باشد)، در این حالت از محدودیت مصنوعی استفاده می‌کنیم.

۴ـ۱۰ـ۱ـ تعریف محدودیت مصنوعی

برای حل هر مسئله از طریق روش سیمپلکس ثانویه که شرایط بهینگی را ندارد (وجود مقدار منفی در سطر تابع هدف) از محدودیت $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq M$ که در آن x_i ها متغیرهای غیرپایه‌ای می‌باشند استفاده می‌شود. به محدودیت فوق محدودیت مصنوعی گفته می‌شود و داریم:

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = M$$

که در آن x_0 متغیر کمکی می‌باشد.

۴ـ۱۰ـ۲ـ الگوریتم حل

۱ـ مسئله را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم (تابع هدف Max و محدودیتها $\leq$ (ک.م))

۲ـ در صورتی که مسئله شرایط بهینگی را نداشته باشد محدودیت مصنوعی مناسب را به مسئله و جدول اضافه می‌کنیم.

۳ـ متغیر واجد شرایط ورود به پایه را انتخاب نموده و سپس متغیر $x_\circ$ را بدون هیچگونه شرطی از پایه خارج می‌کنیم که در این حالت شرایط بهینگی حاصل می‌شود.

۴ـ بقیه مراحل مثل روشهای قبل حل می‌شود.

۴ـ۱۱ـ قضیه فارکاس

دو مسئله روبرو را در نظر بگیرید. اگر A یک ماتریس $m\times n$ و b یک ماتریس $m\times 1$ باشد آنگاه ثابت کنید که:

الف ـ اگر مدل (I) جواب شدنی داشته باشد مدل (II) جواب ندارد.

ب ـ اگر مدل (I) جواب نداشته باشد مدل (II) حتماً جواب دارد.

(I)	(II)
$Ax=b$	$Ay\geq \circ$
$x\geq \circ$	$by<\circ$

در شکل تغییر یافته قضیه فارکاس نیز فقط و فقط یکی از دو سیستم زیر جواب خواهد داشت.

(I)	(II)
$Ax\leq b$	$Ay\leq \circ$
$x\geq \circ$	$y\leq \circ\ ,\ by>\circ$

۴ـ۱۲ـ مسائل معادل در برنامه‌ریزی خطی

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$\{Max\ Z=Cx\ |Ax=b\ ,x\geq \circ\}$

محدودیتهای این مسئله همگی بصورت تساوی بوده و یا اینکه بصورت تساوی درآمده‌اند. در اینصورت همواره روابط زیر برقرار خواهد بود.

۱ـ اگر محدودیتی در عدد $\lambda\neq\circ$ ضرب شود در اینصورت جوابهای مسئله اولیه تغییر نمی‌کند و متغیر متناظر آن محدودیت در مسئله ثانویه در $\frac{1}{\lambda}$ ضرب می‌شود و در هر دو مسئله مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند.

۲ـ اگر بردار ستونی یکی از متغیرها در عدد $\lambda\neq\circ$ ضرب شود، آنگاه متغیر مربوطه در $\frac{1}{\lambda}$ ضرب

می‌شود ولی جوابهای مسئله ثانویه تغییری نمی‌کند و تابع هدف در هردو مسئله بدون تغییر باقی خواهد ماند.

۳ـ اگر k برابر یک سطربه سطر دیگر اضافه شود، جوابهای بهینه مسئله اولیه و ثانویه هیچ تغییری نخواهد کرد.

۴ـ اگر k برابر یک ستون به ستون دیگر اضافه شود، جوابهای بهینه مسئله اولیه و ثانویه هیچ تغییری نخواهد کرد.

۵ـ اگر k برابر یک سطربه تابع هدف افزوده شود، جوابهای مسئله اولیه تغییری نخواهد کرد ولی جوابهای مسئله ثانویه بعلاوه k برابر خواهد شد و مقدار تابع هدف هر دو مسئله به اندازه ky_i تغییر می‌نماید.

۶ـ اگر k برابر یک ستون به سمت راست اضافه شوند جوابهای بهینه مسئله اولیه بعلاوه k برابر شده ولی جوابهای ثانویه تغییری نخواهد کرد و مقدار تابع هدف هردو مسئله به اندازه ky_i تغییر می‌نماید.

۷ـ هرگاه مقادیر سمت راست در $\lambda \neq 0$ ضرب شود، مقادیر متغیرهای مسئله اولیه λ برابر شده و متغیرهای مسئله ثانویه تغییری نمی‌کند و مقدار تابع هدف در هر دو مسئله λ برابر می‌شود.

۸ـ هرگاه سطر هدف مسئله‌ای در عدد $\lambda \neq 0$ ضرب شود، جوابهای مسئله اولیه تغییری نکرده ولی جوابهای ثانویه در λ ضرب می‌شود و مقدار هردو تابع هدف λ برابر می‌شود.

۹ـ اگر مقادیر سطر هدف در عدد α و سمت راست در عدد β ضرب شوند، مقادیر متغیرهای مسئله اولیه در β و مقادیر متغیرهای مسئله ثانویه در α ضرب می‌شوند و مقدار تابع هدف در هر دو مسئله در $\alpha\beta$ ضرب می‌شود.

تابع هدف $(\alpha , \beta) > 0$ سمت راست

۱۰ـ هریک از حالات فوق در صورتی‌که با هم ترکیب شوند، نتایج حاصله نیز با هم ترکیب خواهند شد.

۱۱ـ هرگاه همه مقادیر سمت راست مسئله‌ای بعلاوه k شود در اینصورت جواب مسئله تغییر یافتهٔ ثانویه، نسبت به مسئله اولیه دارای حالت زیر می‌باشد:

$$Z_{\text{جدید}} = Z_{\text{قدیم}} + \sum_{i=1}^{k} k_i y_i$$

$$Z = (b_i + k_i)\, y_i$$ هردو بهینه هستند

حال اگر مقدار تابع هدف مسئله اولیه، بهینه بوده و تغییر یافته بهینه نباشد، رابطه به شکل زیر است:

$$Z_{\text{جدید}} \leq Z_{\text{قدیم}} + \sum_{i=1}^{k} k_i y_i$$

و اگر تابع هدف مسئله اولیه بهینه نبوده و تغییر یافته آن، بهینه باشد رابطه بصورت $\geq$ ظاهر می‌شود و در صورتی‌که هردو بهینه باشد رابطه به شکل تساوی در می‌آید و بطور کلی مقدار تغییرات تابع هدف برابر رابطه زیر است:

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^{k} k_i y_i \quad \text{و یا} \quad \Delta Z = y_i^* \cdot \Delta b_i$$

نکته: اگر بخواهیم از چندین منبع موجود یک منبع انتخاب کنیم تا مقدار آن را افزایش دهیم، محدودیتی (منبعی) انتخاب می‌شود که باعث بهینه نمودن مقدار تابع هدف گردد و در حالت Max داریم:

$$\Delta Z = Max \left[y_i^* \cdot \Delta b_i \right] \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$