



جبر ماتریسی و سیمپلکس اصلاح شده



۱-۳- بردار و فضای برداری

فضای برداری: اگر مجموعه‌ای از بردارها را داشته باشیم به طوری که حاصل جمع هر دو بردار دلخواه و هر ضربی دلخواه از هر بردار، در آن مجموعه باشد آن مجموعه را فضای برداری می‌گویند.

$$\left. \begin{array}{l} a + b = c \\ d = \lambda a \end{array} \right\} \Rightarrow c, d \in \text{فضای برداری}$$

تذکر: هر فضای برداری حتماً شامل بردار صفر خواهد بود و گرنه فضای برداری حاصل نخواهد شد.

۲-۳- استقلال بردارها

در یک فضای n بعدی، بردارهای (a_1, a_2, \dots, a_k) مستقل خطی هستند اگر:

الف) دترمینان ضرایب آنها مخالف صفر باشد. $\neq |A|$

ب) در رابطه $0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ همه λ_i ها صفر باشد.

ج) آنها را توان بصورت ترکیب خطی از بردار صفر نوشت.

۳-۳-وابستگی بردارها

در یک فضای n بعدی، بردارهای (a_1, a_2, \dots, a_k) دارای وابستگی خطی هستند اگر:

الف) دترمینان ضرایب آنها مساوی صفر باشد. $|A| = 0$

ب) در رابطه $0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ همه λ_i ها مساوی صفر نباشد (حداقل یکی از λ_i ها مخالف صفر باشد)

ج) آنها را بتوان بصورت ترکیب خطی از بردار صفر نوشت.

نکته: هرگاه بردار b داخل فضای برداری بردارهای ستونی ماتریس ضرایب قرار گیرد در اینصورت مسئله جواب دارد و در غیر اینصورت مسئله جواب نخواهد داشت.

۳-۴-ماتریس‌ها

یک ماتریس $m \times n$ بصورت زیر نمایش داده می‌شود که در آن:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A = | \quad | \quad a_{ij} \quad | \quad | \quad m \times n$$

سطر
ستون
تعداد سطونها
تعداد سطرها

نکته: هر بردار یک ماتریس است ولی هر ماتریس یک بردار نیست.

مجموع دو ماتریس: دو ماتریس وقتی جمع می‌شوند که تعداد سطرهای و ستونهای مساوی با هم داشته باشند در اینصورت درایه‌های نظیر یکدیگر با هم جمع می‌شوند.

$$A + B = C \Rightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

$$i = j = 1, 2, \dots, n$$

۱-۴-۳- ضرب عدد اسکالر λ در ماتریس

عدد λ در کلیه درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود.

۲-۴-۳- ضرب ماتریس

دو ماتریس در صورتی با یکدیگر ضرب می‌شوند که تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. اگر A ماتریس $m \times n$ و B ماتریس $n \times p$ باشد آنوقت داریم:

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

که در آن C یک ماتریس $m \times p$ می باشد و تعریف می شود:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \begin{array}{l} \text{اگر } i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, p \end{array}$$

۳-۵- ماتریس های خاص

ماتریس مربع : ماتریسی که تعداد سطر و ستونها یاش مساوی باشد $m=n$

ماتریس سطروی : ماتریسی که فقط یک سطر دارد.

ماتریس ستونی : ماتریسی که فقط یک ستون دارد.

ماتریس واحد : ماتریس مربعی که تمام قطرهایش یک و بقیه عناصر آن صفر باشد و با I نمایش می دهدند.

ماتریس قطری : ماتریس مربعی که عناصر غیر قطری آن صفر باشد.

ماتریس اسکالر : ماتریس قطری که عناصر قطر اصلی آن یکسان باشد.

ماتریس ترانسپوز (ترانهاده) : ماتریسی که جای سطر و ستونهای آن عرض شده باشد. اگر ماتریس $A_{m \times n}$ با a_{ij} عنصر مفروض باشد ترانسپوز ماتریس A بصورت یک ماتریس $A_{n \times m}^T$ با عناصر a_{ji} تعریف می شود.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس متعامد : ماتریسی که اگر در ترانسپوز ضرب شود برابر ماتریس واحد شود.

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$$

ماتریس متقارن : ماتریسی که مساوی با ترانسپوزش گردد.

ماتریس شبه متقارن : ماتریسی که مساوی قرینه ترانسپوزش گردد.

ماتریس مثلثی : یک ماتریس مربع $m \times n$ یک ماتریس بالا مثلثی است اگر تمام عناصر بالای قطر اصلی آن به همراه خود قطر اصلی مخالف صفر باشد، و پائین مثلثی است اگر تمام عناصر زیر قطر اصلی آن به همراه خود قطر اصلی مخالف صفر باشد.

۳-۶- اعمال سطر و ستونی ماتریس

ماتریس $A_{m \times n}$ را در نظر می گیریم. می توان بعضی از اعمال سطروی یا ستونی مقدماتی را روی ماتریس

A انجام داد که در حل معادلات خطی مفید باشد.

یک عمل سطروی مقدماتی ماتریس A به سه حالت زیر انجام می پذیرد :

۱- تعریض سطر i با سطر j

۲- ضرب سطر i در یک اسکالر غیر صفر λ

۳- اضافه نمودن λ برابر سطر i به سطر i

یک عمل ستونی مقدماتی ماتریس A نیز به سه حالت زیر انجام می‌گیرد:

۱- تعریض ستون k با ستون l

۲- ضرب ستون k در یک اسکالر غیر صفر λ

۳- اضافه نمودن λ برابر ستون l به ستون k

۷-۳- دترمینان (det یا $|A|$)

تابعی است که به هر ماتریس مربعی یک عدد منحصر به فرد را نسبت می‌دهد. در صورتی که این عدد صفر باشد حداقل یک بردار وابسته سطروی یا ستونی در این دترمینان وجود دارد. و اگر مخالف صفر باشد تمام بردارهای سطروی و ستونی آن مستقل خطی از یکدیگر می‌باشند.

دترمینان ماتریس $n \times n$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{ii} |A_{ii}|$$

که در آن $|A_{ii}|$ از حذف سطر i و ستون اول بدست می‌آید. دترمینان یک ماتریس 1×1 خود همان عنصر می‌باشد.

۷-۴- مینور ($Minor$)

مینور هر عنصر عبارتست از دترمینان حاصل از حذف سطر و ستون آن عنصر از ماتریس اصلی

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2) - 5(1) = -7$$

۷-۵- خواص دترمینان

۱- اگر ماتریس B از جابجایی دو سطر یا دو ستون ماتریس A بدست آید در اینصورت:

$$|A| = -|B|$$

۲- دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانسپوز آن برابر است:

$$|A| = |A^T|$$

۳- اگر تمام عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریس A صفر باشد در اینصورت: $|A| = 0$

۴- دترمینان یک ماتریس که دارای دو سطر یا ستون مساوی باشد، صفر است.

۵- حاصل ضرب هریک از عناصر یک سطر یا یک ستون از ماتریس مربع A در عدد اسکالر λ ، دترمینان A را در λ ضرب خواهد کرد.

۶- دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربع هم مرتبه برابر حاصلضرب دترمینانهای آنها است:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

ماتریس منفرد: ماتریسی که دترمینان آن برابر صفر باشد.

ماتریس غیر منفرد: ماتریسی که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

۳-۸- رتبه ماتریس (Rank)

اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد در اینصورت همیشه $\text{Rank } A \leq \text{Min}(m, n)$ که اگر $\text{Rank } A = \text{Min}(m, n)$ باشد A را رتبه کامل گویند. بنابراین رتبه ماتریس عبارتست از مرتبه یا بعد بزرگترین زیر ماتریس که دترمینان آن صفر نباشد.

مثال: سیستم معادلات $Ax=b$ و ماتریس افزوده $(A|b)$ با m سطر و $n+1$ ستون در نظر بگیرید. حالتهای ممکن برای جوابهای سیستم عبارتست از:

(۱) اگر $\text{Rank}(A|b) > \text{Rank}(A)$ در اینصورت سیستم $Ax=b$ جواب ندارد چون b را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی از A نوشت.

(۲) اگر $\text{Rank}(A|b) = \text{Rank}(A) = n$ آنگاه، $Ax=b$ جواب منحصر به فرد دارد.

(۳) اگر $\text{Rank}(A|b) = \text{Rank}(A) < n$ ، $n < m$ آنگاه، $Ax=b$ بینهایت جواب دارد.

(۴) اگر $m < n$ ، $\text{Rank}(A|b) = \text{Rank}(A) = m$ آنگاه سیستم بینهایت جواب دارد.

(۵) اگر $|A| = 0$ ، $\text{Rank}(A|b) = \text{Rank}(A)$ آنگاه سیستم بینهایت جواب دارد.

(۶) اگر $|A| \neq 0$ ، $\text{Rank}(A|b) = \text{Rank}(A)$ آنگاه سیستم بینهایت جواب منحصر به فرد دارد.

۳-۹- ماتریس وارون (معکوس)

هرگاه ماتریس مربع A در رابطه $AB=BA=I$ صدق کند، در اینصورت B را ماتریس معکوس A می‌گویند و به صورت $B = A^{-1}$ نمایش می‌دهند.

۳-۹-۱- خواص ماتریس معکوس

۱- شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس معکوس داشته باشد این است که دترمینان آن مخالف صفر باشد به عبارت بهتر تمام سطرها و ستونهای آن برداری مستقل از هم باشند.

- ۲- اگر ماتریس A دارای معکوس باشد این معکوس منحصر به فرد است.
- ۳- اگر A و B دو ماتریس غیرمنفرد هم رتبه باشد، معکوس حاصل ضرب، برابر معکوس دومی و معکوس اولی می باشد.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- ۴- اگر A یک ماتریس غیرمنفرد باشد معکوس ترانسپوز آن برابر ترانسپوز معکوس آن است.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

- ۵- اگر A یک ماتریس غیرمنفرد باشد در اینصورت :

۶-۹-۳- قضیه ماتریس معکوس

اگر ماتریس A یک ماتریس مربعی غیرمنفرد باشد ($|A| \neq 0$) و ماتریس $[A|I]$ توسط عملیات ابتدائی سطری به ماتریس $[I|A^{-1}]$ تبدیل شود در اینصورت A^{-1} معکوس یکدیگر می باشند.

مثال: معکوس ماتریس چه ماتریسی می باشد؟

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{2}{5}R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 + R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array} \right]$$

۱۰- سیمپلکس اصلاح شده (ماتریسی)

مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$L.P : \text{Max } Z = Cx$$

$$S.t \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

ایک ماتریس $m \times n$ می باشد؛

در اینصورت X_B را متغیرهای اساسی (پایه) جدول سیمپلکس و X_N را متغیرهای غیراساسی (غیرپایه) در جدول در نظر گرفته و تعریف می کنیم:

$$X_B = (x_1, x_2, \dots, x_n) = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot N \cdot X_N \quad : \text{متغیرهای اساسی (پایه)}$$

نکته: جهت حل مسئله در حالت $\max X_B$ نامعلوم باشد، متغیرهایی را اساسی در نظر می گیریم که بیشترین ضریب را درتابع هدف داشته باشد.

$$\frac{\partial x_B}{\partial x_j} = -B^{-1} \cdot a_j \quad : \text{میزان تغییر متغیرهای پایه } X_B \text{ نسبت تغییر غیرپایه } X_j \text{ به صورت } a_j \text{ می باشد.}$$

تعریف می شود یعنی اگر x_j به اندازه یک واحد افزایش یابد آنوقت $\max X_B$ نامین متغیر پایه x_j به اندازه a_j^{-1} کاهش می یابد.

$$X_N = (x_1, \dots, x_p, s_1, s_m, R_1, \dots, R_k) \quad : \text{متغیرهای غیر اساسی (غیرپایه)}$$

نکته: جهت حل مسئله در حالت $\max X_N$ نامعلوم باشد متغیرهایی را غیراساسی در نظر می گیریم که کمترین ضریب را درتابع هدف داشته باشد.

B : عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در محدودیتهای صورت مسئله.

N : عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه جدول دلخواه در محدودیتهای صورت مسئله.

B^{-1} : ماتریس معکوس که همیشه در زیر متغیرهای پایه اولیه در جدول دلخواه قرار می گیرد.

\bar{N} : عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه در جدول دلخواه

$$\bar{N} = B^{-1} \cdot N$$

C_B : عبارتست از ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در تابع هدف صورت مسئله

\bar{C}_B : عبارتست از ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در سطر تابع هدف، که حتماً صفر است.

C_N : عبارتست از ضرایب متغیرهای غیرپایه تابع هدف صورت مسئله

\bar{C}_N : عبارتست از ضرایب متغیرهای غیرپایه در سطر هدف جدول دلخواه

$$\bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N$$

b : عبارتست از بردار ستونی مقادیر سمت راست در صورت مسئله

\bar{b} : عبارتست از بردار ستونی مقادیر سمت راست در جدول دلخواه

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b$$

a_j^c : عبارتست از بردار ستونی متغیر زام در محدودیتهای صورت مسئله

\bar{a}_j^c : عبارتست از بردار ستونی متغیر زام در محدودیتهای جدول دلخواه

$$\bar{a}_j = B^{-1} \cdot a_j$$

c_j^c : عبارتست از ضریب متغیر زام در سطر هدف صورت مسئله

\bar{c}_j^c : عبارتست از ضریب متغیر زام در سطر هدف جدول دلخواه

$$\bar{c}_j = c_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - c_j = z_j - c_j$$

$$Z = \underbrace{C_B \cdot B^{-1} \cdot b}_{Z_B} - \underbrace{(C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N)}_{\bar{C}_N} X_N = Z_B - (Z_N - C_N) X_N \quad : \text{تابع هدف: } Z$$

نکته: اگر تابع هدف Max باشد و تمام مقادیر $(Z_N - C_N)$ ها مثبت باشد، در اینصورت جواب بهینه می‌باشد و اگر تابع هدف Min باشد و تمام مقادیر $(Z_N - C_N)$ ها منفی باشد، در اینصورت جواب بهینه می‌باشد.

نکته: عبارت $(z_j - c_j) \frac{\partial z}{\partial x_j}$ میزان تغییرات (افزایش یا کاهش) تابع هدف z نسبت به

تغییرات (افزایش یا کاهش) متغیر غیرپایه‌ای x_j را نمایش می‌دهد که به هزینه تقلیل یافته متغیر غیرپایه‌ای x_j تعبیر می‌شود.

نکته: میزان تغییرات تابع هدف و مقدار متغیرهای پایه در اثر تغییر موجودی منابع از رابطه

$$\frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1} \text{ حاصل می‌شود.}$$

ماتریسها و بردارهای فوق بصورت زیر در جدول سیمپلکس جایگیری می‌نمایند. در این جدول، I ماتریس واحد ناشی از متغیرهای پایه می‌باشد.

متغیرهای پایه	z	x_B	x_N	RHS
سطر هدف	۱	o	$C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N$	$C_B \cdot B^{-1} \cdot b$
x_B	o	I	$B^{-1} \cdot N$	$B^{-1} \cdot b$

بنابراین مسئله LP بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{Max } Z = C_B \cdot X_B + C_N \cdot X_N = (C_N, C_B) \begin{pmatrix} X_N \\ X_B \end{pmatrix}$$

$$S.t \quad BX_B + NX_N = b$$

$$X_B \cdot X_N \geq 0$$

☞ **نکته:** بردار X_B وقتی بردار اساسی (پایه) می‌باشد که ماتریس ضرایب تشکیل دهنده پایه، معکوس پذیر بوده و دترمینان این ماتریس مخالف صفر گردد.

☞ **نکته:** اگر در یکی از تکرارهای جدول سیمپلکس، x_j متغیر وارد به پایه باشد در اینصورت مقدارتابع هدف بصورت زیر تغییر می‌کند.

$$Z_{\text{جدید}} = C_B \cdot B^{-1} \cdot b - (Z_j - C_j)x_j = Z_{\text{قدیم}} - [(Z_j - C_j) \times (\theta)]$$

که در آن x_j از حداقل نسبتها (θ) بدست می‌آید و $(Z_j - C_j)$ نیز ضریب متغیر وارد به پایه در سطر z می‌باشد.

☞ **نکته:** اگر ماتریس 2×2 باشد معکوس ماتریس B را داریم:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال: مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید در صورتی که پایه بهینه شامل متغیرهای x_1 و x_2 باشد جدول بهینه را کامل کنید.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad X_B^* = (x_1, x_2)$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

$$X_B = (x_1, x_2)$$

$$X_N = (x_3, S_1, R_1)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس معکوس B را بدست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{a}_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = B^{-1} \cdot N = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ضریب متغیرهای پایه در سطر صفر جدول دلخواه حتماً صفر است.

$$C_B = [2, 3] \rightarrow \bar{C}_B = [\cdot, \cdot]$$

$$C_N = [1, \cdot, -M] \xrightarrow{R} \begin{cases} \text{Max} \rightarrow -M \\ \text{Min} \rightarrow M \\ \rightarrow \cdot \end{cases}$$

روش در مرحله

$$\bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = [2, 3] \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \cdot \\ \frac{1}{3} & \cdot & 1 \end{bmatrix} - [1, \cdot, -M] = [3, 5, 1+m]$$

$$\bar{C}_j = C_B B^{-1} \cdot N - C_j \rightarrow \bar{C}_1 = [2, 3] \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - 1 = 3$$

$$Z = C_B \cdot B^{-1} b - (\bar{C}_N) X_N$$

چون جواب بهینه بوده پس جوابهای غیرپایه صفر خواهند بود.

$$Z = C_B \cdot B^{-1} b = [2, 3] \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 8$$

پس جدول بهینه مستقله فوق بصورت زیر حاصل می شود.

Max	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	RHS
Z	\cdot	\cdot	۳	۵	$1+M$	۸
x_1	۱	۰	-۱	۴	-۱	۱
x_2	۰	۱	۲	-۱	۱	۲

سلامتی و تعزیل در فرج آقا امام زمان (عج) صلوات