

[Www.iepnu.ir](http://www.iepnu.ir)

« روش‌های محاسبات عددی »

فصل اول: خطاها و تقریب‌ها

فصل دوم: حل معادلات غیر خطی

فصل سوم: درون‌یابی

فصل چهارم: مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

فصل پنجم: معادلات دیفرانسیل عددی معمولی

فصل ششم: حل عددی دستگاه معادلات خطی

فصل هفتم: مقادیر و بردارهای ویژه

فصل هشتم: برازش منحنی

فصل اول : خطاها و تقریب‌ها

۱- خطای مطلق و نسبی

۲- قطع

۳- پارامترهای عددی

۴- خطای شمارش (گرد کردن)

۵- خطای محاسبات

نمایش اعداد

بسط یک عدد در مبنای r :

$$a_m \times r^m + a_{m-1} \times r^{m-1} + \dots$$

$$a_m \neq 0$$

$$m \in \mathbb{Z}$$

$$r \in \mathbb{Z} \quad 2 \leq r \leq 10$$

$$(62 / 544)_{10} = 6 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-4}$$

$$(0 / 0\overline{101})_2 = 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + \dots = (?)_{10}$$

$$\text{بسط نامتناهی و تکراری} \quad = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{8+2+1}{32} = \frac{11}{32}$$

قضیه: هر عدد حقیقی یک نمایش منحصر به فرد بسط در مبنای r ، $2 \leq r \leq 10$ دارد. بسط منحصر به فرد است مگر اینکه سمت راست عدد بی نهایت $(r-1)$ داشته باشد! هر گرد کردنی دلیل بر این نمی‌شود که ۲ بسط داشته باشد.

$$A = 1/29999... = 1/2\bar{9} = 1 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$$

تصادد عددی $S \quad a_0 + (1 - a_0)d$

$$a_0, (a_0 + m), (a_0 + 2m) = 1 + 0/2 + 9(10^{-2} + 10^{-4} + \dots) = 1/2 + \frac{0/09}{0/9} = 1/3 = 1 \times 10^0 + 30$$

هندسی $\begin{cases} a_0 + a_0q + a_0q^2 + a_0q^3 + \dots \sum \text{Sum} \frac{a_0}{1-q} \\ \text{if } |q| < 1 \end{cases}$

قضیه: اگر بسط عدد A ، مختوم یا نامختوم متناوب باشد، بسط مربوط به یک عدد گویاست.

عکس قضیه نیز برقرار است.

بسط یک عدد در مبنای ۲:

$$\begin{array}{r} 56 \underline{)2} \\ 28 \underline{)2} \\ \hline 0 \quad 14 \underline{)2} \\ \hline 0 \quad 7 \underline{)2} \\ \hline 0 \quad 3 \underline{)2} \\ \hline 1 \quad 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad (56)_{10} = (111000)_2$$

$$C_i = 0 \text{ یا } 1 \quad C_1, C_2, \dots? \quad A = [0/C_1C_2C_3\dots]_2 = (C_1 \times 2^{-1} + C_2 \times 2^{-2} + C_3 \times 2^{-3} + \dots)$$

$$2A = (C_1 + \underbrace{C_2 \times 2^{-1} + C_3 \times 2^{-2} + \dots}_{0 \leq x < 1 \text{ سری هندسی}}) \quad [2A] = [C_1 + x] = C_1 \quad 0 < x < 1$$

(اگر همه اعداد ۱ باشد، ۱ می شود)

و روش را تکرار می کنیم



الگوریتم:

۱- A و n را بگیر (n تعداد تکرارها)

۲- $C_i \leftarrow [2A]$

۳- $A \leftarrow 2A - C_i$

۴- $i \leftarrow i + 1$ ، اگر $i < n$ برو به ۲ در غیر این صورت توقف کن.

بسط عدد $\frac{9}{10}$ در مبنای ۲ کدام است؟

i	A	$2A$	$C=[2A]$	$A \leftarrow 2A - C_1$
1	0/9	1/8	$C_1=1$	0/8
2	0/8	1/6	$C_2=1$	0/6
3	0/6	1/2	$C_3=1$	0/2
4	0/2	0/4	0	0/4
5	0/4	0/8	0	0/8

الف) $0/1\overline{1001}$

ب) $0/0\overline{1001}$

ج) $0/1\overline{1100}$ ✓

د) $0/0\overline{011}$

حالت ۱: $0 = A \leftarrow$ بسط مختوم

حالت ۲: A تکرار شود \leftarrow بسط متناوب

حالت ۳: $i = n \leftarrow$ چیزی نمی توان گفت، n را می دهند.

بسط $\frac{1}{5}$ در مبنای ۲ ؟

نمایش عدد A در مبنای ۲ عبارت است از $A = 0/0\overline{101}$ نمایش A در مبنای ۱۰ کدام است؟

الف) $\frac{3}{16}$

ب) $\frac{5}{8}$

ج) $\frac{5}{16}$

د) $\frac{1}{3}$ ✓

$$A = 0.0101 = 0.01010101... = 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + ... =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ... = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

ضرایب دو جمله‌ای

خطای مطلق و نسبی:

اگر a تقریبی از A باشد، آنگاه خطای a را با $e(a)$ نشان می‌دهند:

$$e(a) = A - a$$

$E(a)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، خطای مطلق a نامیده می‌شود:

$$E(a) = |e(a)| = |A - a|$$

و خطای مطلق حدی a را با e_a نمایش می‌دهیم که:

مثال: اگر $\frac{3}{14}$ تقریبی از عدد π باشد، خطای مطلق حدی $a = \frac{3}{14}$ را پیدا کنید.

$$\frac{3}{14} < \pi < \frac{3}{15} \quad \rightarrow \quad |\pi - \frac{3}{15}| < 0.01 \quad e_a = 0.01$$

$$\Rightarrow e_a = 0.01$$

$$\frac{3}{14} < \pi < \frac{3}{1416} \quad \rightarrow \quad |\pi - \frac{3}{14}| < 0.0016 \quad e_a = 0.0016$$

خطای مطلق حدی 2 ± 0.5

$$\begin{cases} 2.5 \pm 0.5 \\ 94262 \pm 0.5 \end{cases}$$

مقدار دوم خطای بهتری است \Leftarrow خطای نسبی مقدار کمتری به دست می آید.

تعریف: اگر a تقریبی از A باشد، آنگاه خطای نسبی a به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{|A|} = \frac{E(a)}{|A|}$$

با خطای نسبی امکان مقایسه خطاها فراهم می گردد.

اگر $\frac{|A - a|}{|A|} \leq \delta(a)$ ، $\delta(a)$ را خطای نسبی حدی می گویند.

$$|a| - |A| \leq |A - a| \leq e_a \quad (1)$$

$$|A| \geq |a| - e_a \quad (2)$$

خطا نمی تواند از مقدار واقعی بزرگتر باشد

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{|A|} \leq \frac{1}{|a| - e_a} \quad (3)$$

$$(3) \text{ و } (1) \Rightarrow \delta(a) = \frac{|A - a|}{|A|} \leq \frac{e_a}{|a| - e_a}$$

$$\delta(a) \leq \frac{e_a}{|a| - e_a} \quad \text{قضیه:}$$

$$\delta(a) \leq \delta(a) = \frac{e_a}{|a|}$$

توجه: معمولاً از e_a در مقابل $|a|$ صرف نظر می شود:

کران بالای خطای نسبی

مثال: در تعیین ثابت گازها برای هوا عدد $R \approx 29/25$ به دست آمده است. با دانستن این که خطای نسبی این مقدار

۰/۰۰۱ می باشد، حدود R را به دست آورید.

$$\delta(a) \approx \frac{e_a}{|a|} = 0/001$$

$$e_a = |R - 29/25| \Rightarrow \frac{|R - 29/25|}{29/25} = 0/001 \Rightarrow |R - 29/25| \approx 0/03$$

$$R = 29/25 \pm 0/03 \quad \text{اختلاف مقدار واقعی با مقدار تقریبی}$$

$$\text{بسط تیلور} \quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)(\Delta x)^2}{2} + \dots$$

$$54/26 = 5/426 \times 10^1$$

$$0/00026 = 2/6 \times 10^{-4}$$

ارقام با معنی: نماد علمی یک عدد اعشاری به صورت زیر است:

$$A = a \times 10^b$$

$$1 \leq a < 10$$

ارقام با معنی شامل: ۱- ارقام غیر صفر، ۲- ارقام صفر بین دو رقم غیر صفر، ۳- صفرهای جلوی عدد

ارقام با معنی با تعداد ارقام نماد علمی برابر است.

انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم:

$$2/5653$$

$$\Rightarrow 2/57 \quad \text{۲ رقم اعشار گرد}$$

$$\Rightarrow 2/56 \quad \text{روش قطع کردن}$$

تا تعداد رقم خواسته شده نوشته می شود و سایر ارقام در نظر گرفته نمی شوند.

$$2/5653 = 2/57 \quad (2D) \quad \text{گرد شده تا دو رقم اعشار}$$

گرد شده تا چهار رقم معنادار $2/5653 = 2/565 \quad (4S)$

$$2/5656 = 2/566 \quad (4S)$$

قضیه: اگر a گرد شده عدد A تا n رقم اعشار باشد، آنگاه:

$$e(a) = |a - A| \leq 5 \times 10^{-(n+1)}$$

ارقام با معنی درست یک تقریب:

فرض کنید a تقریبی از A باشد و d تعداد ارقام با معنی a باشد.

تعداد ارقام با معنای درست a ، بزرگترین n که $n \leq d$ و در رابطه‌ی * صدق کند.

$$a = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$

$$* \quad |a - A| < 5 \times 10^{m-n}$$

مثال: فرض کنید $2/242$ تقریبی از $2/3145$ باشد، تعداد ارقام با معنای درست $a=2/242$ را به دست آورید.

$$a = 2 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + \dots \quad m = 0 \quad d = 4$$

$$|2/3145 - 2/242| < 5 \times 10^{0-n}$$

$$0/0725 < 5 \times 10^{-n} = 0/5$$

$n = 1$ ، تعداد ارقام با معنای درست

قضیه: اگر a ، گرد شده A تا n رقم با معنا باشد، آنگاه تعداد ارقام با معنای درست a ، برابر n است.

قضیه: اگر a ، دارای n رقم با معنای درست باشد آنگاه داریم:

$$\delta(a) \leq 5 \times 10^{-n}$$

اگر بخواهیم تقریبی از A با خطای نسبی کمتر از 10^{-n} به دست آوریم، آن را تا $10^{-(n+1)}$ گرد می کنیم.

پس کافیت A تا $(n+1)$ رقم با معنا گرد شود.

$$\delta(a) < 5 \times 10^{-(n+1)} < 10^{-n} = 10 \times 10^{-(n+1)}$$

مثال: تقریبی از A به دست آورید که خطای نسبی آن از 10^{-n} کمتر باشد.

$$A = 2 / 42539$$

$$\delta(a) < 10^{-4} \quad a = 2 / 4254$$

خطای حاصل جمع

مقدار واقعی $A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n$

مقدار تقریبی $a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$

خطای مطلق $e(a_1) \quad e(a_2) \quad \dots \quad e(a_n)$

$$E(a) = |e(a)| = |A - a| \leq \underbrace{|e(a_1)| + |e(a_2)| + \dots + |e(a_n)|}_{\sum |e(a_i)|}$$

خطای مجموع کوچکتر مساوی از مجموع خطاهاست.

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n \quad A = \sum A_i$$

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad a = \sum a_i$$

$$E(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq \underbrace{E(a_1) + E(a_2) + \dots + E(a_n)}_{\sum E(a_i)}$$

خطای حاصل ضرب

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \quad A = \prod A_i$$

$$a = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \quad a = \prod a_i$$

$$E(a) = |e(a)| = |A - a| \leq \max \{E(a_i)\}$$

$$E(a) \leq \max \{E(a_i)\}$$

خطای نسبی حاصل جمع: مثل خطای مطلق حاصل ضرب

$$\text{مقدار واقعی} \quad A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n$$

$$\text{مقدار تقریبی} \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$$

$$\text{خطای نسبی} \quad \delta(a_1) \quad \delta(a_2) \quad \dots \quad \delta(a_n)$$

$$\left. \begin{array}{l} A = A_1 + A_2 \\ a = a_1 + a_2 \end{array} \right\} \quad \delta(a_1 + a_2) \leq \max \{\delta(a_1), \delta(a_2)\}$$

$$\delta(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq \max \{\delta(a_1), \delta(a_2), \delta(a_n)\}$$

$$E(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq E(a_1) + E(a_2) + \dots + E(a_n)$$

$$\text{مطابق فرمول اصلی} \quad E(a_1 \cdot a_2) \leq a_1 E(a_2) + a_2 E(a_1) \leq \delta(a_1) + \delta(a_2)$$

$$\begin{aligned} E(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) &\leq a_1 a_2 E(a_3) + a_3 E(a_1 a_2) \\ &\leq a_1 a_2 E(a_3) + a_3 [a_1 E(a_2) + a_2 E(a_1)] \\ &\leq a_1 a_2 E(a_3) + a_1 a_3 E(a_2) + a_2 a_3 E(a_1) \end{aligned}$$

توجه: خطای نسبی حاصل ضرب کوچکتر مساوی از مجموع خطاها

خطای نسبی $\delta(a_1 \cdot a_2 \dots a_n) \leq \delta(a_1) + \delta(a_2) + \dots + \delta(a_n)$

خطای نسبی $\delta(a_1 + a_2 + \dots a_n) \leq \max \{\delta(a_1), \dots \delta(a_n)\}$

تمرین ۱: خطای نسبی حاصل ضرب $u = x_1 \cdot x_2 \dots x_n$ در چه رابطه‌ای صدق می‌کند؟

$$\delta(a_1 \cdot a_2 \dots a_n) \leq \sum \delta(a_i)$$

✓ الف $\delta u \leq \delta x_1 + \delta x_2 + \dots$

ب $\delta u = |\delta x_1| + |\delta x_2| + \dots$

ج $\delta u = \delta x_1 + \delta x_2 + \dots \delta x_n$

د $\delta u = \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \dots \delta x_n$

تمرین ۲: اگر a گرد شده A تا n رقم اعشار باشد، در روش گرد کردن داریم:

الف $|A - a| \leq 5 \times 10^{-(n+1)}$

ب $|A - a| \leq 5 \times 10^{-n+1}$

✓ ج $|A - a| \leq 10^{-(n+1)}$

$$|A - a| \leq 10^{-n} \quad (د)$$

سری تیلور

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

$$f(x) \approx a_0 + a_1(1) + a_2(1) + \dots + E(1)$$

$$\sum a \sin nx + b \cos nx \quad \text{سری فوریه}$$

فرضیات: f و مشتقات آن تا مرتبه k موجود و پیوسته باشند (حول یک نقطه $x = a$ ، مثلاً در یک بازه (b, c)) که $a \in (b, c)$ حد چپ و راست موجود باشد و با هم برابر باشند، پیوستگی و $x \in b, c$ قرار می‌دهیم.

$$n \leq k$$

$$R_n(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^n(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

حکم: برای هر $x \in b, c$ داریم:

$$f(x) = R_n(x) + E_n(x)$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)}$$

αx بین x و a است

در صورتی که تابعی از درجه n باشد، خطای آن در مرتبه $n+1$ صفر می‌باشد.

اگر حول نقطه $x=0$ بسط تیلور را بنویسیم، بسط را بسط مک لورن گویند.



$$f(x) = e^x$$

$$R(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{(x)^2}{2!} + \dots$$

$$f(x) = e^x \rightarrow x=0 \text{ حول نقطه} : R_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$f(x) = \sin x \rightarrow R_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow R_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!}$$

تمرین: بسط تیلور توابع زیر را حول نقطه $x=0$ بنویسید. (تا هر چند جمله که فرضیات قضیه را نقض نکند).

$$f(x) = \arctan x$$

$$f(x) = \ln(1-x)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \\ \cos x - 1 \end{cases}$$

خطای بسط تیلور مرتبه n ام:

$$|E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

کران بالا

کران بالای خط



$$M = \max |f^{(n+1)}(t)| \quad t \text{ بین } \alpha \text{ و } x \text{ باشد.}$$

$$f^{(n+1)} = x + \sin x - 2x^2 \quad n \text{ در فاصله } [0, 2]$$

$$\Rightarrow |x + \sin x - 2x^2| < |x| + |\sin x| + 2|x|^2 \leq 11$$

تابع هدف: بیشترین مقداری که تابع نشان می دهد، در نقطه اعلام شده.

$$\max(x^2 + 2x) = 8$$

$$0 \leq x \leq 2$$

ماکزیمم در نقطه $x=2$ ، ۸ است.

تمرین: می خواهیم $\cos(0/1)$ را با استفاده از سری تیلور حول صفر با $1 - \frac{(0/1)^2}{2}$ تقریب بزنیم. کران بالای

خطای این تقریب برابر است با:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{10^{-14}}{12} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{array}{cc} E_2 & E_3 \\ \uparrow & \uparrow \end{array} \quad \text{بهترین خطا}$$

$$\frac{10^{-14}}{24} \quad (\text{ب}) \quad \checkmark$$

$$\frac{10^{-3}}{6} \quad (\text{ج})$$

$$\cos x = 1 + 0x - \frac{x^2}{2!} + 0x^3 + \frac{x^4}{4!} + 0x^5 + \dots$$

$$\frac{10^{-6}}{24} \quad (\text{د})$$

$$\begin{cases} |f(x) - R_3(x)| = f(x) - R_n(x) + E_n(x) \\ R_2(x) = R_3(x) \end{cases}$$

$$f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x) \rightarrow f''(x) = -\cos(x)$$

$$f'''(x) = \sin(x) \rightarrow f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

$$E_2 = \frac{f^3(\alpha x)}{3!}(x)^3, \quad E_3 = \frac{f^4(\alpha x)}{4!}(x)^4$$

$$|E_3(x)| = \left| \frac{f^4(\alpha x)}{4!}(x)^4 \right| < \frac{M|x|^4}{4!}$$

$$M = \max_{x \in [0, 0.1]} |f^4(x)| = \max_{x \in [0, 0.1]} |\cos x| = 1$$

$$\frac{1}{4!}(0.1)^4 = \frac{(0.1)^4}{4!} = \frac{10^{-4}}{24}$$

$$\left| \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < 0.001 \quad \text{یا} \quad \left| \frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < ?$$

این مقدار را داریم

مثال: اگر بخواهیم $e^{0.1}$ را چگونه با بسط تیلور تقریب بزنیم حول نقطه $x=0$ تا چند جمله (مرتبه) از بسط تیلور

$e^{0.1}$ را بنویسیم تا خطای آن کمتر از 10^{-3} باشد؟

فصل دوم: حل عددی معادلات غیر خطی

تعیین محل تقریبی و تعداد ریشه‌ها با استفاده از رسم منحنی

مثال ۱: محل تقریبی ریشه را برای معادله زیر پیدا کنید.

$$x \log_{10}^x - 1 = 0$$

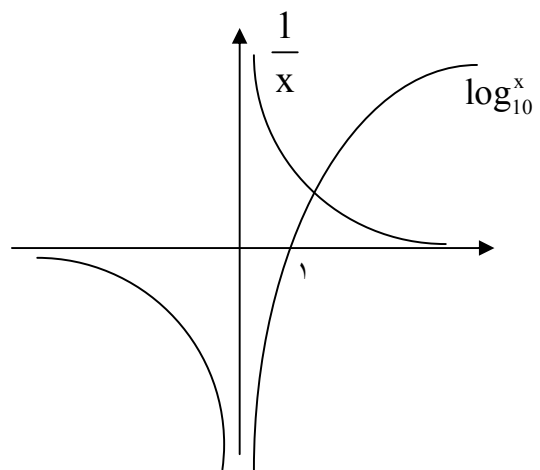
$$\log_{10}^x = \frac{1}{x}$$

نقاط تقاطع منحنی‌ها ریشه است

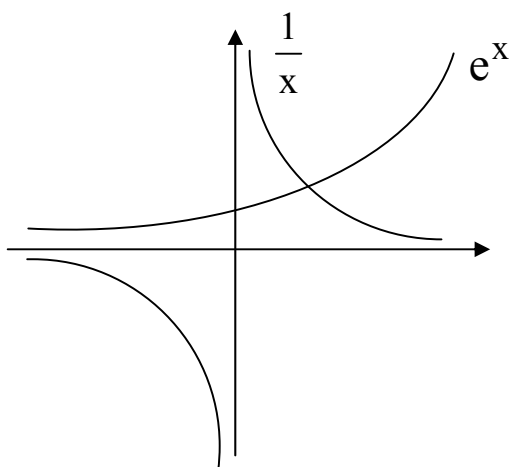
$$2 = 10^? \Rightarrow \log_{10}^2 < \frac{1}{2} \quad \log_{10}^3 < \frac{1}{3}$$

$$\log_{10}^x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ریشه بین ۲ و ۳ است.



مثال ۲: معادله $xe^x - 1$ چند ریشه دارد؟



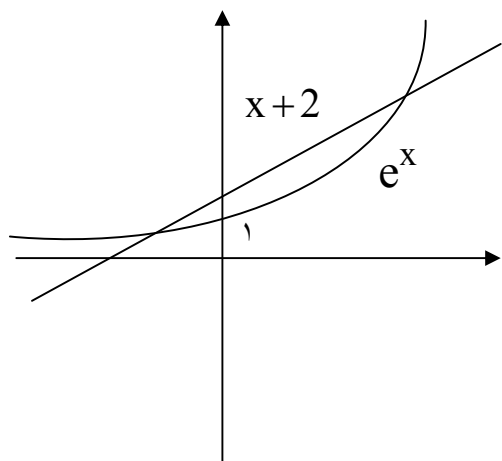
الف) صفر

ب) یک ✓

ج) ۳

د) بی نهایت

مثال ۳: تعداد ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $e^x - x - 2 = 0$ کدام است؟



الف) 0

ب) 1

ج) 2 ✓

د) 3

مثال ۴: معادله $f(x) = x^2 - 3x - e^x = 0$ در فاصله‌ی $[1, 4]$ چند ریشه حقیقی دارد؟

الف) 2

ب) 1

ج) ریشه ندارد ✓

د) اصولاً ریشه‌اش منفی است.

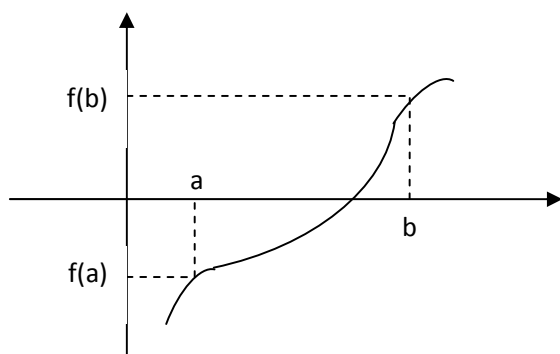
روش تنصیف (دو بخشی) Bisection Method

شرایط:

۱- f در $[a, b]$ پیوسته باشد.

۲- $f(a).f(b) < 0$

بنابراین حتماً یک ریشه در a, b دارد.



الگوریتم:

۱- بازه (a, b) که $f(a).f(b) < 0$ انتخاب شود. $(N > 0)$ در نظر گرفته شود. $i=1$

$$x_i = \frac{a+b}{2} \quad -2$$

۳- اگر $f(x_i).f(a) < 0$ ، $b \leftarrow x_i$ و اگر $f(b).f(x_i) < 0$ ، $a \leftarrow x_i$ و اگر $f(x_i)=0$ ، x_i ریشه است، متوقف شوید.

۴- شرط توقف اگر $i < N$ ، $i \leftarrow i+1$ برو به مرحله ۲ و اگر $i \geq N$ ، توقف کن، x_i تقریب ریشه است.

شرط توقف:

$$|f(x_i)| < \varepsilon \quad -1$$

$$|x_{i-1} - x_i| < \varepsilon \quad -2$$

$$\frac{|x_{i-1} - x_i|}{|x_i|} < \varepsilon \quad -3$$

i	a	b	f(a)	f(b)	x_i	$f(x_i)$	مقایسه
1	0	1	2	/1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$f(a).f(x_i) < 0 \Rightarrow b \leftarrow x_i \quad a \leftarrow \frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	/1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{16}$	$f(b).f(x_i) < 0 \Rightarrow a \leftarrow x_i \quad b \leftarrow \frac{3}{4}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$		

ریشه معادله $f(x) = x^2 - 4x + 2 = 0$ در بازه $(0, 1)$ پیدا کنید.

$$\frac{9}{16} - \frac{12}{4} + 2 = \frac{9 - 48 + 32}{16} = \frac{-5}{16}$$

با روش دوبخشی و سه مرحله

$$x_3 = \frac{5}{8}$$

چند مرحله از روش دوبخشی لازم است تا خطای مطلق تقریب ریشه برای معادله $x + \cos x = 0$ در بازه $(0, 1)$ قرار گیرد و 10^{-2} کمتر باشد؟

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

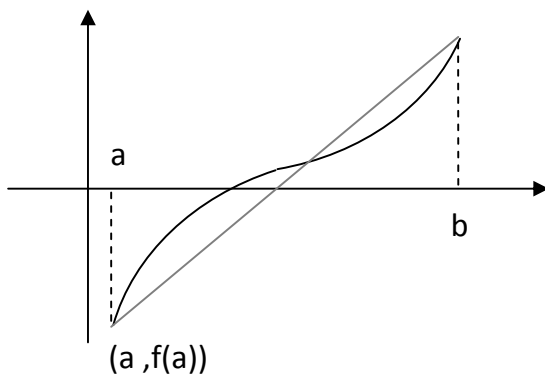
خطای مطلق = مقدار واقعی - مقدار تقریبی

$$E_\alpha = |x_n - \alpha| < 10^{-2} \Rightarrow |x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} < 10^{-2}$$

$$\frac{1-0}{2^n} < 10^{-2} \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10$$

روش نابجایی

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$



سؤال: چرا x_1 با رابطه‌ی فوق تعیین می‌شود؟

فرض: f یک تابع پیوسته در $[a, b]$ و $f(a).f(b) < 0$

۱- $i=1$ ، a و b را بگیر. (به شرطی که $f(a).f(b) < 0$)

۲- $x_i = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$ اگر شرط توقف برقرار است، x_i تقریبی از ریشه است، توقف کن در غیر

این صورت به مرحله ۳ برو.

۳- اگر $b \leftarrow x_1$ ، $f(x_i).f(a) < 0$

و اگر $a \leftarrow x_1$ ، $f(b).f(x_i) < 0$

سپس $i \leftarrow i+1$ و به مرحله ۲ برو.

مثال: ریشه معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ را با روش نابجایی و تا سه مرحله به دست آورید.

بازه (۰،۱)

i	a	b	x_i	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_i)$	مقایسه
1	0	1	$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1}{2}$	1	/1	$-\frac{1}{4}$	
2	0	$\frac{1}{2}$	$x_2 = \frac{-\frac{1}{2}(1)}{-\frac{1}{4}-1} = \frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{25}$	
3	0	$\frac{2}{5}$	$x_3 = \frac{-\frac{2}{5}(1)}{-\frac{1}{25}-1} = \frac{10}{26}$	1	$-\frac{1}{25}$		

$$x_3 = \frac{10}{26} \text{ تقریب جواب است.}$$

توجه: سرعت همگرایی روش دوبخشی از روش نابجایی کمتر است.

روش تکرار ساده

فرض می کنیم که x_0 نقطه آغازین

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

.

.

.

$$x_n = g(x_{n-1})$$

سؤال:

۱- x_0 چگونه تعیین می شود، آیا هر x_0 مناسب است؟

۲- g مناسب چگونه تعیین می شود که همگرایی تضمین شود؟

قضیه:

فرضیات:

۱- حتماً f در فاصله (a,b) حداقل یک ریشه دارد.

۲- معادله $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$ نوشته شود.

۳- تابع g از $[a,b]$ به توی $[a,b]$ تعریف شود.

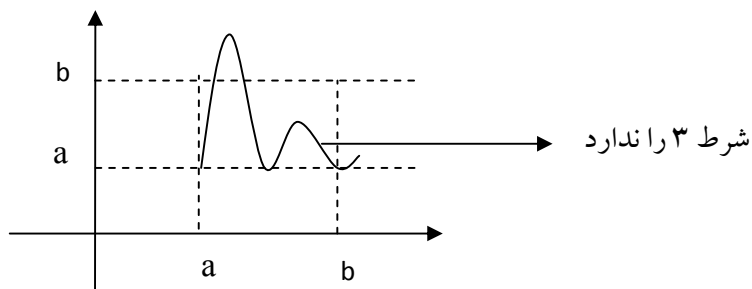
$$x \in [a, b] \rightarrow f(x) \in [a, b]$$

۴- برای $x \in (a, b)$ داشته باشیم: $|g'(x)| < 1$

(برای هر $g(x)$ که در بازه پیدا کردیم، مشتقش کوچکتر از یک باشد).

x_0 را در بازه a, b تعیین می کنیم.

تابع پیوسته ماکزیمم و مینیمم خودش را در فاصله ی بسته می تواند بگیرد.



نتایج:

۱- معادله $f(x)=0$ فقط یک ریشه در (a,b) دارد. \leftarrow فرضیه ۳

۲- اگر $x_0 \in [a, b]$ آنگاه دنباله تشکیل شده با روش تکرار ساده $\{x_n\}$

$x_{n+1} = g(x_n)$ به ریشه معادله همگرا می شود: $x_n \rightarrow a$

بسط تیلور

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x - a)$$

بسط تیلور حول x_n :

$$g(x) = g(x_n) + g'(x_n)(x - x_n)$$

$$g(a) = g(x_n) + g'(a_n)(a - x_n)$$

$$a = x_{n+1} + g'(a_n)(a - x_n)$$

$$|a - x_{n+1}| = |g'(a_n)| |a - x_n|$$

$$|g'(x)| < L < 1 \quad x \in [a, b]$$

$$n = 0 \Rightarrow |x_1 - a| < L |x_0 - a|$$

$$|x_2 - a| < L |x_1 - a|$$

...

$$|x_{n-1} - a| < L |x_{n-2} - a|$$

$$|x_n - a| < L |x_{n-1} - a|$$

$$|x_n - a| < L(L |x_{n-2} - a|) \rightarrow |x_n - a| < L^2 |x_{n-2} - a|$$

...

$$|x_n - a| < L^n |x_0 - a|$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \rightarrow a$$

مثال: برای محاسبه تقریبی تنها ریشه مثبت معادله $x^3 - x^2 - 1 = 0$ که در فاصله‌ی (۰،۱) قرار دارد، این

معادله را به صورت $x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ می‌نویسیم. نشان دهید این انتخاب مناسب‌تر است و تقریبی از این ریشه را به روش تکرار شاده تا ۶ تکرار به دست آورید.

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2(x+1) = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{(x+1)} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f(0) = -1 \quad f(0)f(1) < 0$$

یک ریشه در بازه $[0,1]$ داریم



$$x = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad g:[0,1] \rightarrow [0,1]$$

مرحله اول:

$$0 \leq x < 1$$

$$1 \leq x+1 < 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} < 1$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$$

هر چه L کوچکتر باشد، همگرایی سریعتر است.

مرحله دوم:

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{-1}{2(\sqrt{x+1})(x+1)}$$

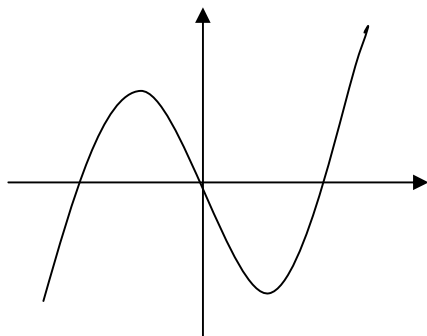
$$g'(x) = \left| \frac{1}{2(x+1)(\sqrt{x+1})} \right| \leq \frac{1}{2} \leq 1 \quad x \in [0,1]$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.82$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{\sqrt{0.82+1}} = \frac{1}{\sqrt{1.82}} = ?$$

مثال: در روش‌های تکرار ساده برای حل معادله $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ کدام تابع مناسب‌تر است؟ $x \in [2, 3]$



$$x^3 - 2x^2 = 5$$

$$3x^2 - 4$$

مشتق

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 5}}{2} \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = \frac{5}{x^2 - 2} \quad (\text{ب})$$

$$g(x) = \frac{x^4 - 2x^3}{5} \quad (\text{ج})$$

$$g(x) = \sqrt[3]{5 + 2x^2} \quad (\text{د}) \quad \checkmark$$

تعریف مرتبه همگرایی دنباله:

فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به ∞ همگرا شود.

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha)$$

آن‌گاه می‌گوییم مرتبه همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ برابر $P > 0$ است، اگر $C > 0$ موجود باشد که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^P} \right| = C$$

هرچقدر P بزرگتر باشد، سرعت همگرایی بیشتر است.

تمرین: دلیل هندسی عبارت فوق چیست؟ (چرا)

مرتبه همگرایی روش تکرار ساده

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ی تولید شده با روش تکرار ساده باشد $x_{n+1} = g(x_n)$ آن‌گاه اگر $g'(\alpha) \neq 0$ ریشه معادله، روش تکرار ساده از مرتبه همگرایی ۱ است.

وجود دارد β بین x و α

$$\begin{aligned} \alpha &= g(x) \\ f(x) = 0 &\rightarrow f(x) = 0 \\ \updownarrow \\ x = g(x) &\rightarrow \alpha = g(x) \end{aligned}$$

مرتبه صفر $f(x) = f(\alpha) + f'(\beta_1)(x - \alpha)$

مرتبه ۱ $f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\beta_2)(x - \alpha)^2}{2}$

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\beta_3)(x - \alpha)^3}{3!} + \frac{f''(\beta_4)(x - \alpha)^4}{4!}$$

غلط $f(x) \boxed{=} f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$

درست $f(x) \boxed{\approx} f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$

قضیه تیلور $f(x) = R_n(x) + E_n(x)$

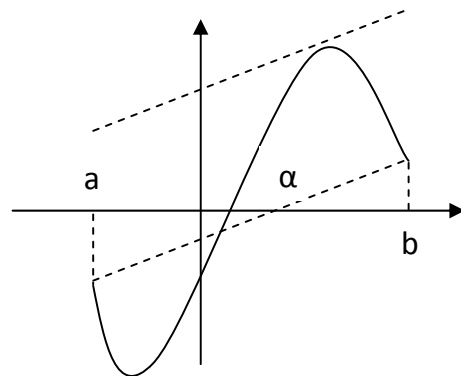
اگر یک تابع مشتق‌پذیر باشد، β_1 بین x و α هست که:

$$f'(\beta_1) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

قضیه مقدار میانگین

$$f'(\beta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

قضیه تیلور از مرتبه صفر، قضیه مقدار میانگین می شود.



از نظر هندسی :

بسط تیلور تا مرتبه صفر را برای تابع $g(x)$ حول نقطه $x = \alpha$ می نویسیم.

$$g'(\alpha) \neq 0$$

$$g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha_x)(x - \alpha) \quad \alpha_x \text{ بین } x \text{ و } \alpha$$

$$g(x_n) = g(\alpha) + g'(\alpha_n)(x_n - \alpha) \quad \alpha_n \text{ بین } x_n \text{ و } \alpha$$

$$x_{n+1} = \alpha + g'(\alpha_n)(x_n - \alpha) \Rightarrow \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right| = |g'(\alpha_n)|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |g'(\alpha_n)| = |g'(\lim \alpha_n)| = |g'(\alpha)| > 0$$

مثال $x_n = e^{-n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}} = \frac{e^{-n} e^{-1}}{e^{-n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

α_n بین α و X_n است، X_n به سمت ریشه یعنی α همگرا می‌شود. (وقتی $g'(\alpha)$ پیوسته باشد).

بنابراین مرتبه همگرایی تکرار ساده وقتی $g'(\alpha) \neq 0$ ، برابر ۱ است.

نتیجه: اگر $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) \neq 0$ مرتبه همگرایی روش تکرار ساده چقدر است؟

$$g(x_n) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{g''(\alpha_n)(x_n - \alpha)^2}{2!} \quad \alpha_n \text{ بین } \alpha \text{ و } x_n$$

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{g''(\alpha_n)(x_n - \alpha)^2}{2} \Rightarrow \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \right| = \frac{1}{2} |g''(\alpha_n)|$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \right| = \frac{1}{2} |g''(\alpha_n)| > 0$$

مرتبه همگرایی برابر ۲ است.

(اگر $g'(\alpha) \neq 0$ ، مرتبه همگرایی دقیقاً ۱ است.)

نتیجه:

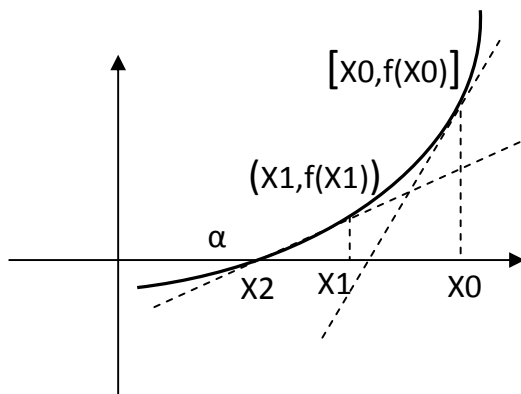
۱- اگر $g'(\alpha) = 0$ ، مرتبه همگرایی حداقل ۲ است.

۲- اگر $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) \neq 0$ ، مرتبه همگرایی دقیقاً ۲ است.

۳- اگر $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) = 0$ ، مرتبه همگرایی حداقل ۳ است.

۴- اگر $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) = 0$ ولی $g'''(\alpha) \neq 0$ ، مرتبه همگرایی دقیقاً ۳ است.

روش نیوتن رافسون



معادله خط مماس : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad f'(x_0) \neq 0$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{برای حل معادلات غیر خطی}$$

توجه: روش نیوتن یک روش تکرار ساده است؟

$$\text{اگر } f(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = g(x) \quad (1)$$

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{روش تکرار ساده}$$

در روش تکرار ساده داریم:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad *$$

باید نشان دهیم که (۱) برقرار است:

: فرض می‌کنیم

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$

پس روش نیوتن یک روش تکرار ساده است.

توجه: مرتبه همگرایی روش نیوتن، اگر $f'(\alpha) \neq 0$ ، حداقل ۲ است.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

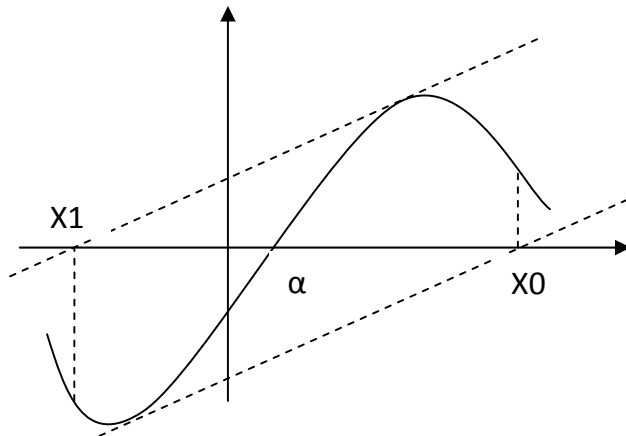
$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad \Rightarrow \quad g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0$$

پس مرتبه همگرایی حداقل ۲ است. $\Rightarrow f(\alpha) = 0$ ، α ریشه است

نکته: ممکن است روش نیوتن همگرا نشود:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ۱- \text{ برای بعضی } n \text{ ها صفر شود، کسر بی معنی می شود.}$$

۲- ممکن است دنباله‌ای تکراری تولید شود که همگرا نیست.



توجه: اگر نقطه شروع x_0 در روش نیوتن به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، همگرایی روش نیوتن تضمین می‌شود. معمولاً نقطه شروع، از روش‌های ساده‌تر تقریبی از را برای روش نیوتن به دست می‌آورند. (مثل نابجایی، وتری، تنصیف و ...)

توجه: اگر $f'(\alpha) = 0$ ، مرتبه همگرایی روش نیوتن، دقیقاً ۱ است.

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

x_0
 x_1
...
 $f'(x_n)$

مثال: چند جمله‌ای $p(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ دارای ریشه‌های ۰ و ۳ است، برای پیدا کردن ریشه $x = -3$ با نقطه شروع مناسب روش نیوتن از چه مرتبه همگرایی است؟

$$p'(x) = 3x^2 + 12x + 9 \quad \rightarrow \quad p'(-3) = 3(3)^2 - 36 + 9 = 0$$

مرتبه همگرایی دقیقاً برابر ۱ است.

0 (د

2 (ج

3 (ب

1 (الف ✓

مثال: روش نیوتن رافسون برای محاسبه ریشه $f(x) = (x-2)^3 - 8$ وقتی x نزدیک عدد ۴ باشد، دارای چه مرتبه همگرایی است؟

$$\begin{cases} f'(x) = 3(x-2)^2 & , & g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} & , & g'(4) = 0 \\ f'(4) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{الف)} \\ \text{ب)} \checkmark \end{matrix}$$

$$f''(x) = 6(x-2) \quad \text{ج)}$$

$$g'(x) = \frac{6[(x-2)^2 - 8][x-2]}{9(x-2)^4} = \frac{6}{9} \left[1 - \frac{8}{(x-2)^3} \right] \quad \text{د)}$$

$$g''(x) = -\frac{48}{9} \left[\frac{-3}{(x-2)^4} \right] & , & g''(4) \neq 0 \quad g'' \text{ در نقطه ۴ غیر صفر است.}$$

پس مرتبه همگرایی دقیقاً ۲ است.

مثال: ریشه سوم عدد ۱۲ را با روش تکرار ساده تا ۶ مرحله به دست آورید.

$$x = \sqrt[3]{12} \rightarrow x^3 - 12 = 0$$

$$x_1 = 1 < 0$$

$$x_2 = 2 < 0$$

$$x_3 = 3 > 0$$

بین ۲ و ۳ یک ریشه داریم، پس نقطه‌ای در بازه‌ی [۲ و ۳] را به عنوان نقطه شروع در نظر می‌گیریم:

$$x_0 = 2/5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_1 = 2/5 - \frac{[(2/5)^3 - 12]}{3[2/5]^2} = 2/3$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 12}{3x_n^2} \Rightarrow x_2 = 2/3 - \frac{[(2/3)^3 - 12]}{3[2/3]^2} = \dots$$

روش نیوتن تعمیم یافته برای ریشه‌های تکراری:

$$f(\alpha) = 0 \text{ ، ریشه‌ی } f$$

$$f(\alpha) = 0 \text{ و } f'(\alpha) = 0 \text{ ، ریشه مرتبه ۲ (مضاعف)}$$

$$f(\alpha) = 0 \text{ و } f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0 \text{ ، ریشه مرتبه ۳}$$

اگر α ریشه مرتبه P برای f باشد، آن‌گاه از فرمول تعمیم یافته زیر برای پیدا کردن ریشه استفاده می‌کنیم:

$$x_{n+1} = x_n - P \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

توجه: اگر α ریشه مرتبه‌ی P ام f باشد، ریشه مرتبه $P-1$ ام f' ، مرتبه $P-1$ ام f'' و ... است. پس باید دنباله‌های زیر به یک مقدار همگرا شوند:

$$x_{n+1} = x_n - P \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

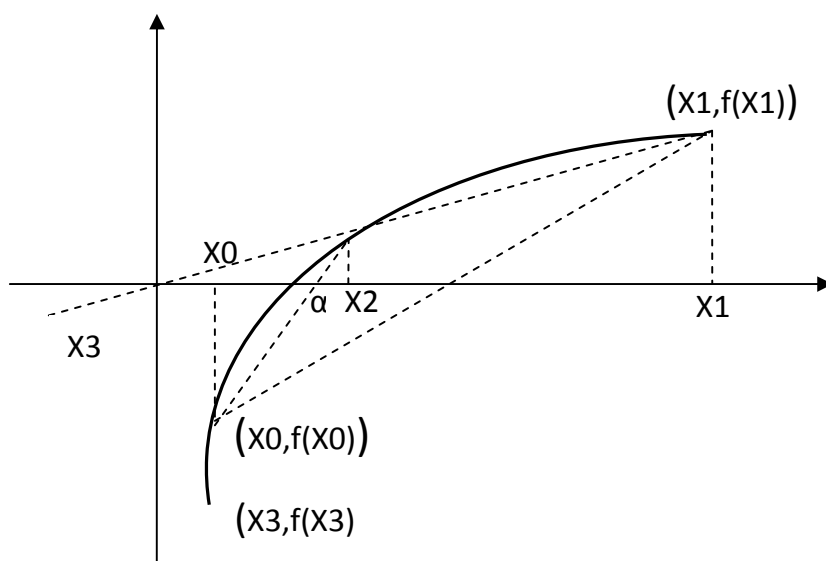
$$x_{n+1} = x_n - P \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - P \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

...

در صورتی که عددی برای P در نظر بگیریم و x_{n+1} را برای $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ به دست آوریم، در صورتی که نزدیک به هم باشند، آن گاه P همان هرته همگرایی است.

روش وتری



همانند روش نابجایی است ولی مقایسه وجود ندارد و به ترتیب نقاط به دست آمده، مقادیری را به دست می آوریم.

x_0 ، x_1 نقاط ابتدایی و شروع هستند.

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

...

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

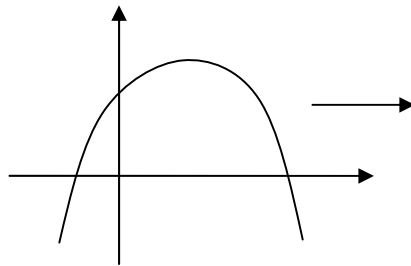
توجه: مرتبه همگرایی روش وترى حدوداً ۱/۶ است. (در صورت همگرایی)

فصل سوم : درون یابی

تابعی داریم که در بعضی از نقاط مقدار آن مشخص می‌باشد (تابع جدولی) و با استفاده از مقادیر مشخص شده، سایر مقادیر را به‌طور تقریبی محاسبه نماییم.

تابع جدولی

x_i	0	1	2
f_i	2	3	1



تابع درون یاب

$\begin{cases} P_2(x) = a + bx + cx^2 \\ Q(x) = ae^x + b \ln(x+1) + c \sin x \end{cases}$	چند جمله‌ای درون یاب
	تابع درون یاب

$$\begin{cases} P_2(0) = a = 2 \\ P_2(1) = a + b + c = 3 \\ P_2(2) = a + 2b + 4c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 4c = -1 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 4c = -1 \\ -2b + -2c = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \qquad \qquad \qquad 2c = -3 \\
 & \qquad \qquad \qquad \rightarrow c = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$a + b + c = 3 \rightarrow 2 + b - \frac{4}{2} = 1 \rightarrow b + 0/5 = 1 \rightarrow b = 0/5$$

برای معادله Q داریم:

$$\begin{cases} Q(0) = a = 2 \\ Q(1) = ae + b \ln 2 + c \sin 1 = 3 \\ Q(2) = ae^2 + b \ln 3 + c \sin 2 = 1 \end{cases}$$

درون یابی چند جمله ای

تابع جدولی

x_i	x_0	x_1	...	x_i
f_i	f_0	f_1	...	f_n

را در نظر بگیرید. می خواهیم چند جمله ای از درجه حداکثر n ، $p_n \in P_n$: مجموعه چند جمله ای ها از درجه حداکثر n را به دست آوریم که در شرط زیر صدق کند:

$$P_n(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

درون یابی لاگرانژ

فرض کنید $L_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) چند جمله ای از درجه حداکثر n باشند.

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

طوری تعریف کنیم که

$$\begin{cases} L_0(x) & \rightarrow & L_0(x_0)=1, L_0(x_i)=0 & i \neq 0 \\ L_1(x) & \rightarrow & L_1(x_1)=1, L_1(x_i)=0 & i \neq 1 \\ \dots & & & \\ L_n(x) & \rightarrow & L_n(x_n)=1, L_n(x_i)=0 & i \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

$$p_n(x_i) = f_i$$

L_i ها را چگونه می توان به دست آورد :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

$$j = 0, \dots, n$$

مثال: چند جمله ای درونیاب تابع $f(x) = \ln x$ را در نقاط گره ی $x_0 = 3$, $x_0 = 2$, $x_0 = 1$ درونیابی کنید. (روش لاگرانژ)

* چند جمله ای درونیاب از درجه حداکثر ۲ است.

درجه صفر یعنی تابع ثابت است.

x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$
f_i	$f_0 = 0$	$f_1 = 0/69$	$f_2 = 1/09$

$$p_2(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(1 - 2)(1 - 3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(2 - 1)(2 - 3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(2 - 1)(3 - 2)}$$

$$p_2(x) = -0/69(x - 1)(x - 3) + \frac{1/09}{2}(x - 1)(x - 2)$$

$$L_n(2/5) = p_n(2/5) = -0/69(2/5 - 1)(2/5 - 3) + \frac{1/09}{2}(2/5 - 1)(2/5 - 2)$$

حجم محاسبات بالا می‌رود.

نقطه ضعف روش لاگرانژ

۱- برای n های بزرگ، حجم محاسبات زیاد می‌شود.

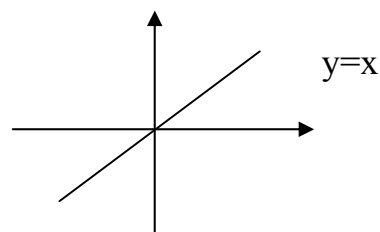
۲- با اضافه شدن نقطه گرهی جدید همه محاسبات از سر گرفته می‌شود.

x_i	1	2	3
f_i	1	4	9

از درجه حداکثر ۲

x_i	1	2	3
f_i	1	2	3

از درجه ۱ چندجمله‌ای لاگرانژ داریم.



چندجمله‌ای به دست آمده از روش لاگرانژ یکتا است.

قضیه: برای تابع جدولی

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

چندجمله‌ای درون‌یاب از درجه حداکثر n یکتاست.

فرض کنید $p_n(x)$ و $Q_n(x)$ که $Q_n(x) \neq p_n(x)$ هر دو چندجمله‌ای‌های درون‌یاب (درجه حداکثر n) و $K(x)$ از درجه حداکثر n است، پس حداکثر n ریشه دارد. از طرفی چون $p_n(x)$ و $Q_n(x)$ چندجمله‌ای‌های درون‌یاب هستند از نقاط گره‌ی می‌گذرند.

$$K(x) = p_n(x) - Q_n(x)$$

پس K ، $n+1$ ریشه دارد که تناقض است. پس $Q_n(x) = p_n(x)$.

پس حکم ثابت شد.

$$p_n(x) = Q_n(x) = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$K(x_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$$

چند جمله‌ای از درجه n ، n ریشه دارد.

مثال: چند جمله‌ای درونیاب $f(x) = x^3$ در نقاط $x_0 = 1$ ، $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$ کدام است؟

x_i	0	1	2
f_i	0	1	8

الف) $x^3 - x^2$

ب) $x^2 - x - 1$

ج) $x^3 - x^2 - 1$

د) $3x^2 - 2x$ ✓

مثال: برای تابع جدولی روبه‌رو تقریب $f(2/5)$ برابر کدام گزینه است؟

x_i	1	2	3	4
f_i	2	5	10	11

الف) $7/625$

ب) $6/725$

ج) $7/526$

د) $6/527$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$p_3(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_3 L_3(x)$$

روش تفاضلات تقسیم شده نیوتنی

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_j - x_i}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

$$f[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] = \frac{f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j]}{x_{j+1} - x_{j-2}}$$

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_0	f_0	$\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \alpha = f[x_0, x_1]$	$\frac{\beta - \alpha}{x_2 - x_0} = \eta = f[x_0, x_1, x_2]$	$\frac{\theta - \eta}{x_3 - x_0} = 1$
x_1	f_1	$\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \beta = f[x_1, x_2]$	$\frac{\gamma - \beta}{x_3 - x_1} = \theta = f[x_1, x_2, x_3]$	
x_2	f_2	$\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \gamma = f[x_2, x_3]$		
x_3	f_3			

$$p_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

$$p_3(x) = f_0 + \alpha(x - x_0) + \eta(x - x_0)(x - x_1) + K(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

مثال: چند جمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x) = \ln x$ را در نقاط گره‌ی $x_0 = 1$ ، $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$ ، با روش تفاضلات نیوتن به دست آورید؟

x_i	1	2	3
f_i	0	0/69	1/09

x_i	f_i		
1	0		
2	0/7	$\frac{0/7 - 0}{2 - 1} = 0/7$	
3	1	$\frac{0/3 - 0/7}{3 - 1} = -0/2$	

$$p_2(x) = 0 + 0/7(x - 1) - 0/2(x - 1)(x - 2)$$

توجه: در جدول تفاضلات نیوتن اگر آخرین عنصر روی قطر اول صفر شود، چندجمله‌ای:

$$p_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

از درجه حداکثر $n-1$ است، اگر عنصر ماقبل آخر نیز صفر شود، چندجمله‌ای از درجه حداکثر $n-2$ است.

تمرین: چندجمله‌ای لاگرانژی بنویسید که از نقاط $(x_2, f_2), (x_2, f_1), (x_1, f_1), (x_0, f_0)$ بگذرد و سپس

عبارت $\frac{3x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ را به صورت جمع جبری چند کسر جزئی بیان کنید.

خطا در چندجمله‌ای‌های درونیاب

مقدار تابع در یک نقطه را نمی‌توانیم حساب کنیم، از بسطش استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = R_n(x) + E_n(x) \quad \text{بسط تیلور مرتبه } n$$

$$\forall x, E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)(x - \alpha)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n که از یک سری نقاط می‌گذرد و یکتا است.

x_i	x_0	x_1	...	x_n	$f(x) \approx p_n(x)$
f_i	f_0	f_1	...	f_n	

قضیه: اگر f یک تابع $k+1$ بار مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته باشد، p_n چندجمله‌ای درونیاب f از درجه حداکثر n

، در نقاط x_0, x_1, \dots, x_n باشد، آن‌گاه خطای چندجمله‌ای درونیاب به صورت زیر است:

چند جمله‌ای درون‌یاب از نقاط گرهی می‌گذرند و در نقاط گرهی خطای دقیق آن در گره صفر است.

$$E_n(x) = f(x) - R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad \alpha \in I(x_0, \dots, x_n)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x-x_i)$$

$$E_n(x) = f(x) - R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!} (x-\alpha)^{(n+1)}$$

α_x برای هر x ای فرق می‌کند.. (بین x و α)

$$|E_n(x)| < \frac{M}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \quad \text{کران بالا خطا در نقطه به طول } x$$

$$\forall x \quad |E_n(x)| = \frac{MN}{(n+1)!} \quad \text{اگر به } x \text{ وابسته نباشد.}$$

$$M = \text{Max} |f^{(n+1)}(x)| \quad x \in I(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

$$N = \text{Max} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \quad x \in I(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

توجه: با نگاه کردن به خطای چند جمله‌ای درون‌یاب واضح است که خطا برای چند جمله‌ای‌های با درجه حداکثر n صفر است، زیرا مشتق $n+1$ ام این توابع برابر صفرند و همچنین به وضوح خطا در نقاط گرهی برابر با صفر است.

$$f(x) - p_3(x) = E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

مثال: چند جمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ را در نقاط گرهی، $x_2 = 1$ ، $x_1 = 0$ ، $x_0 = -1$ به دست آورید.

الف) کران بالای خطا در نقطه $x = \frac{1}{2}$ چقدر است؟

ب) کران بالای خطا را به دست آورید.

(الف)

$$\begin{aligned} n=3 \quad |E_n(x)| &< \frac{M}{3!} |(x+1)(x)\dots(x-1)| = \frac{M}{6} \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3M}{48} = \\ &= \frac{M}{16} = \left(\frac{M}{2}\right)^3 \frac{1}{16} = \frac{M^3}{128} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f''(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f'''(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\begin{aligned} M = \max_{x \in [-1,1]} |f'''(x)| &= \max_{x \in [-1,1]} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \\ x &\in [-1,1] \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} N = \max_{x \in [-1,1]} |(x)(x-1)(x+1)| &= 0/384 \\ x &\in [-1,1] \end{aligned}$$

$$g(x) = (x)(x-1)(x+1)$$

$$g'(x) = (x^2 - 1) + (x^2 + x) + x^2 - x = 3x^2 - 1$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{+\sqrt{3}}{-3} \Rightarrow g'(x) = \left(\frac{+\sqrt{3}}{-3}\right) = \pm 0/384$$

$$|E_n(x)| < \frac{MN}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 [0/384]$$

تفاضلات متناهی:

درون یابی با تفاضلات پیشرو نیوتن

عملگر تفاضلات پیشرو: تابع جدولی

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

مفروض است، فرض کنید:

$$x_{i+1} - x_i = h \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = \\ &= (f(x+2h) - f(x+h)) - (f(x+h) - f(x)) = \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\Delta f_i = \Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

جدول تفاضلات پیشرو نیوتن:

x_i	f_i	$\Delta f_i \quad i = 0, 1, 2$	$\Delta^2 f_i \quad i = 0, 1$	$\Delta^3 f_0$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f_1 - f_0$	$\Delta f_1 - \Delta f_0$	
x_2	f_2	$f_2 - f_1$	$\Delta f_2 - \Delta f_1$	$\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$
x_3	f_3	$f_3 - f_2$		

فرض کنید $x = x_0 + h\theta$ و داریم $\theta = \frac{x - x_0}{h}$

چند جمله ای درون یاب f به صورت زیر تعیین می شود:

$$p_n(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-n)}{n!} \Delta^n f_0$$

مثال: برای تابع جدولی زیر با استفاده از درونیابی مقدار تقریبی $f(0/5)$ را به دست آورید.

x_i	f_i	$\Delta f_i \quad i = 0, 1, 2$	$\Delta^2 f_i \quad i = 0, 1$	$\Delta^3 f_0$
x_0	0			
x_1	2	2		
x_2	-1	-3	-5	
x_3	3	4	7	12

$$p_n(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_0$$

$$p_n(x) = 0 + 2\theta - \frac{5}{2}\theta(\theta-1) + \frac{12}{6}\theta(\theta-1)(\theta-2)$$

$$x = x_0 + h\theta = -1 + 2\theta$$

$$\frac{1}{2} = -1 + 2\theta \rightarrow 2\theta = \frac{3}{2} \rightarrow \theta = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx p_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + 2\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\theta = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x+1}{2}$$

$$p_n(x) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2} - 1\right) + 2\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2} - 1\right)\left(\frac{x+1}{2} - 2\right)$$

$$p_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

ارتباط بین تفاضلات تقسیم شده نیوتن و تفاضلات پیشرو:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{h^2 2!}$$

مثلاً:

مثال:

x_i	f_i	Δf_i	Δf_0
0	5		
2	1	-4	
4	-1	-2	2

$$f[2, 4] = \frac{\Delta f_1}{h} = \frac{\Delta f_1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

خطا در چند جمله‌ای درون یاب پیشرو

$$E_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \theta(\theta-1)\dots(\theta-n) f^{n+1}(\alpha) \quad \alpha \in I(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

$$|E_n(x)| < \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!} |\theta(\theta-1)\dots(\theta-n)| \quad \theta = \frac{x-x_0}{h} \quad \text{کران بالای خطا}$$

چند جمله ای درون یاب پسرو

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = E(f) - f = (E-1)f \quad \Delta = (E-1)$$

$$E = f(x+h) \quad \text{عملگر تغییر مکان}$$

تفاضلات پسرو نیوتن

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x) &= \nabla(\nabla f(x)) = \nabla f(x) - \nabla f(x-h) = \\ &= (f(x) - f(x-h)) - (f(x-h) - f(x-2h)) = \\ &= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h) \end{aligned}$$

$$h = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

x_i	f_i	$\nabla f_i \quad i = 1, 2, 3$	$\nabla^2 f_i \quad i = 2, 3$	$\nabla^3 f_3$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f_1 - f_0$		
x_2	f_2	$f_2 - f_1$	$\nabla f_2 - \nabla f_1$	
x_3	f_3	$f_3 - f_2$	$\nabla f_3 - \nabla f_2$	$\nabla^2 f_3 - \nabla^2 f_2$

چند جمله ای درون یاب f به صورت زیر است:

$$x_n + h\theta \quad \text{فرض}$$

$$p_n(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!} \nabla^3 f_n + \dots + \frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}{n!} \nabla^n f_n$$

مثال: چندجمله‌ای درونیاب پسرو را برای جدول زیر به دست آورید و مقدار $f(\frac{1}{3})$ را تقریب بزنید.

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$
0	3	2	1
2	5		
4	8		

$$x = x_n + h\theta = 2 + \theta \quad \theta = x - 2 \quad \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} \quad \theta = -\frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} p_2(x) = 8 + 3\theta + \frac{\theta(\theta+1)}{2} \\ p_2(x) = f_n + 3(x-2) + \frac{(x-2)(x-1)}{2} \end{cases}$$

$$f(\frac{1}{3}) = p_2(\frac{1}{3}) = 8 + 3(\frac{1}{3} - 2) + \frac{(\frac{1}{3} - 2)(\frac{1}{3} - 1)}{2} = ?$$

توجه: اگر مقدار تقریبی تابع را در نقطه‌ای بخواهیم که به بالای جدول نزدیک باشد، از چندجمله‌ای درونیاب پیشرو استفاده می‌کنیم و اگر به پایین جدول نزدیک باشد، از چندجمله‌ای درونیاب پسرو استفاده می‌کنیم.

ارتباط بین تفاضلات تقسیم شده نیوتن و تفاضلات پسرو

$$f[x_{i-k}, x_{i-k+1}] = \frac{\nabla f_i}{h^k k!}$$

خطا در چندجمله‌ای پسرو

$$E_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \theta(\theta+1)\dots(\theta+n) f^{n+1}(\alpha) \quad \alpha \in I(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

$$|E_n(x)| < \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!} |\theta(\theta+1)\dots(\theta+n)| \quad \text{کران بالای خطا}$$

$$x = x_n + h\theta \quad \theta = \frac{x - x_n}{h}$$

تمرین: $f(x) = x^{n+1}$ ، چه شرطی لازم است تا چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_0, x_1, \dots, x_n درجه‌ای کمتر از n داشته باشد؟

الف) نقاط متساوی الفاصله

$$\sum_{i=0}^n x_i = 0 \quad \text{ب) } \checkmark$$

$$\prod_{i=0}^n x_i = 0 \quad \text{ج)$$

$$\sum_{i=0}^n x_i = h \quad \text{د)$$

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= x^{n+1} - \overbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}^{n+1} \\
&= x^{n+1} - [x^{n+1} - (x_0 + x_1 + \dots + x_n)x^n + Q(x)] \\
p_n(x) &= (x_0 + x_1 + \dots + x_n)x^n + Q_{n-1}(x) \\
\Rightarrow \sum_{i=0}^n x_i &= 0
\end{aligned}$$

تمرین: تابع $\cos x$ را با چه اندازه گام h باید جدول بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی خطی نایبتر (\leq) از

$$\frac{1}{2} \times 10^{-4} \text{ شود؟}$$

الف) 0/01

ب) 0/015

ج) 0/02 ✓

د) 0/04

$$|E_n(x)| = \left| \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \theta(\theta-1)\dots(\theta-n) f^{n+1}(\alpha) \right|$$

خطا در درونیابی پیشرو

$$|E_1(x)| = \left| \frac{f^2(\alpha)}{2!} (x-x_0)(x-x_1) \right| < \frac{MN}{2}$$

روش نیوتن

$$M = \max |-\cos x| = 1 \quad x \in [x_0, x_1]$$

$$g(x) = (x-x_0)(x-x_1) \Rightarrow g'(x) = (x-x_0) + (x-x_1) = 0$$

↓

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

$$< \frac{MN}{2} = \frac{h^2}{8} < \frac{1}{2} \times 10^{-4} \quad h^2 = \frac{8}{2} \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-4}$$

$$h = 2 \times 10^{-2}$$

$$|E_n(x)| = \left| \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \theta(\theta-1)\dots(\theta-n) f^{n+1}(\alpha) \right| < \frac{h^2}{2} \theta(\theta-1) < \frac{h^2}{2} N$$

$$N = \max_{\theta \in [0,1]} \theta(\theta-1) = \max_{\theta \in [0,1]} |\theta^2 - \theta| = \frac{1}{4}$$

$$2\theta - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{1}{2}$$

$$|E_n(x)| < \frac{h^2}{8} < \frac{1}{2} \times 10^{-4} \quad h^2 < 4 \times 10^{-4}$$

$$h < 2 \times 10^{-2}$$

تمرین: یک تابع جدولی به شکل روبه‌رو داریم. مقدار تابع در نقطه $\frac{1}{2}$ چقدر است؟

(تابع یکنوا باشد، از کوچک به بزرگ باشد)

x_i	-1	2	4
f_i	0	6	9

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = ? \quad f(?) = \frac{1}{2}$$

مثال: برای تابع جدولی زیر تقریبی از ریشه را به دست آورید.

\bar{x}_i	f_i	5	6	9
\bar{f}_i	x_i	-1	2	4

$$f(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = ?$$

↓

ریشه

x_i	f_i
5	-1
6	2
9	4

$$\bar{p}_2(\bar{x}) = -1 + 3(\bar{x} - 5) - \frac{7}{12}(\bar{x} - 5)(\bar{x} - 6)$$

$$\text{تقریب ریشه} \quad \bar{p}_2(0) = -1 - 15 + \frac{35}{12}(-6) = -1 - 15 - 17/5 = -33/5$$

چون صفر درون بازه نمی باشد، درونیابی امکان پذیر نیست.

مشتق گیری عددی

فرض کنید تابع جدولی زیر در اختیار است. هدف پیدا کردن تقریبی از $f'(\alpha)$ است که

$$\alpha \in I (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

برای این کار فرض می کنیم نقاط متساوی الفاصله هستند. چند جمله ای درونیاب پیشرو به صورت زیر است:

$$p_n(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$$p_n'(x) = \frac{dp_n(x)}{dx} = \frac{dp_n(x)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \Delta^2 f_0 + \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{1}{3}\right) \Delta^3 f_0 + \dots \right]$$

$$\begin{cases} x = x_0 + h\theta \\ dx = h d\theta \end{cases} \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$f'(x_0) \approx p_n'(x_0) \xrightarrow{\theta=0} \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 f_0 + \dots \right]$$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \Delta f_0, \quad f'(x) \approx \left[\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 \right]$$

$$f'(x_1) \approx p_n'(x_1) \xrightarrow{\theta=1} \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_0 + \frac{1}{4} \Delta^4 f_0 + \dots \right]$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{h} \Delta f_0 \quad \text{۲ نقطه}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{h}[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0], \dots \quad \text{۳ نقطه}$$

مثال: برای تابع جدولی زیر مقدار تقریبی

$$f'(3) \quad -۱$$

$$f'(4) \quad -۲$$

را به دست آورید.

x_i	f_i	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
$x_0 = 1$	4			
$x_1 = 3$	2	-3	-1	
$x_2 = 5$	-1	-5	2	-1
$x_3 = 7$	-6			

۱- ابتدا با استفاده از ۳ تا گره پایینی جدول مشتق را تقریب می‌زنیم:

$$f'(3) = f'(x_0) = \frac{1}{h}[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0] = \frac{1}{2}[-3 - \frac{1}{2}(-2)] = -1$$

۲- اگر از همه گره‌ها استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} f'(4) = f'(x_1) &= \frac{1}{h}[\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0] = \frac{1}{2}[-2 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{3}(-1)] = \\ &= \frac{1}{2}[-2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}] = \frac{1}{2}(\frac{-12-3-2}{6}) = \frac{-17}{12} \end{aligned}$$

$f'(4)$ را به کمک سه گره آخر به دست می آوریم:

$f'(4)$ در نقاط گره نیست ← با استفاده از ۳ گره پایینی

$$f'(x) = \frac{1}{h} [\Delta f_0 + (\theta - \frac{1}{2}) \Delta^2 f_0] = \frac{1}{2} [-3 + 0] = -\frac{3}{2}$$

$$x = 4, \quad x = x_0 + h\theta \Rightarrow 4 = 3 + 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}$$

خطا در مشتق گیری عددی

$$x = 4, \quad x_0 = 1 \Rightarrow 4 = 1 + 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{h} [\Delta f_0 + (\theta - \frac{1}{2}) \Delta^2 f_0 + (\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{1}{3}) \Delta^3 f_0 + \dots]$$

(مثلاً \sinh در نزدیکی صفر به کدام یک معادل یک تابع خطی درجه ۱ عمل می کند.)

خطا در مشتق گیری عددی

تعریف O بزرگ :

اگر $f(h)$ یک تابع و k یک عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه می گوئیم f از مرتبه $O(h^k)$ است. (یا متناسب با h^k است.)

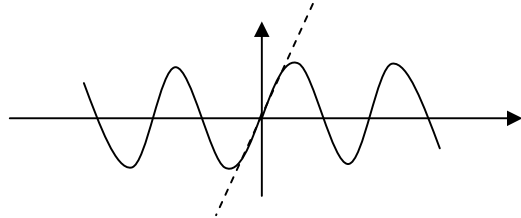
اگر $C \neq 0$ موجود باشد که:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^k} = C$$

$$f(h) = \frac{1}{8}h^3 + \frac{1}{2}h^4 + \frac{1}{3}h^5 + \frac{1}{4}h^6 + \dots$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^3} = \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(h) = O(h^3)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \Rightarrow \sin(h) = O(h)$$



تمرین: خطاهای برشی روش‌های مشتق‌گیری را به دست آورید.

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} \quad \text{خطا} = O(h^?)$$

مقدار تقریبی - مقدار واقعی = خطا

$$\text{خطا} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - f'(x_i + \frac{h}{2}) = O(h^?)$$

بسط تیلور $f(x_i)$ و $f(x_i + h)$ را حول نقطه $(x_i + \frac{h}{2})$ می‌نویسیم:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad \text{بسط تیلور حول } x$$

$$f(x_i + h) = f(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) = f(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{h}{2}f'(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{h^2}{8}f''(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{h^3}{48}f'''(x_i + \frac{h}{2}) + \dots$$

$$f(x_i) = f(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}) = f(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{h}{2}f'(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{h^2}{8}f''(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{h^3}{48}f'''(x_i + \frac{h}{2}) + \dots$$

$$\text{خطا} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - f'(x_i + \frac{h}{2}) = \frac{h^2}{24} f'''(x_i + \frac{h}{2}) + \dots = O(h^2)$$

پس خطا از مرتبه h^2 است.

تعریف مشتق با استفاده از تفاضلات پسرو

چند جمله‌ای درون‌یاب با استفاده از تفاضلات پسرو به صورت زیر است:

$$x = x_n + h\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = h \rightarrow dx = h d\theta \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$f(x) \approx p_n(x) = f_n + \theta \nabla f'_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} = \frac{dp_n(x)}{dx} = \frac{dp_n(x)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dp_n(x)}{d\theta} = \frac{1}{h} \left[\nabla f_n + \left(\theta + \frac{1}{2}\right) \nabla^2 f_n \right. \\ \left. + \frac{3\theta^2 + 6\theta + 2}{6} \nabla^3 f_n + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\theta = 0 \rightarrow f'(x_n) \approx p'_n(x) = \frac{1}{h} \left[\nabla f_n + \frac{1}{2} \nabla^2 f_n + \frac{1}{3} \nabla^3 f_n + \dots \right]$$

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h} [\nabla f_n] \quad \text{نقطه ۲}$$

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h} \left[\nabla f_n + \frac{1}{2} \nabla^2 f_n \right], \dots \quad \text{نقطه ۳}$$

مثال: تقریبی از $f'(2)$ را با استفاده از فرمول مشتق تفاضلات پسر و به دست آورید.

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$
0	4	-5	9
1	-1		
2	3		

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h} [\nabla f_n + \frac{1}{2} \nabla^2 f_n] \quad \theta = \frac{x - x_n}{h} = \frac{2 - 2}{1} = 0$$

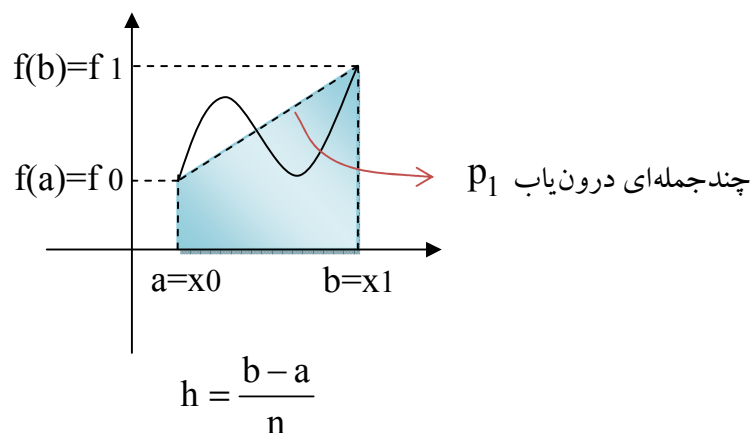
$$f'(2) = f'(x_n) \approx \frac{1}{1} [4 + \frac{1}{2} (9)] = 8/5$$

انتگرال گیری عددی

۱- انتگرال گیری عددی نیوتن کاتس : اگر به جای انتگرال گیری از خود تابع، از چند جمله ای درونیاب

انتگرال بگیریم، فرمول های انتگرال گیری نیوتن کاتس به دست می آید.

اگر از دو نقطه گرهی x_1, x_0 استفاده شود، روش انتگرال گیری دوزنقه به دست می آید.



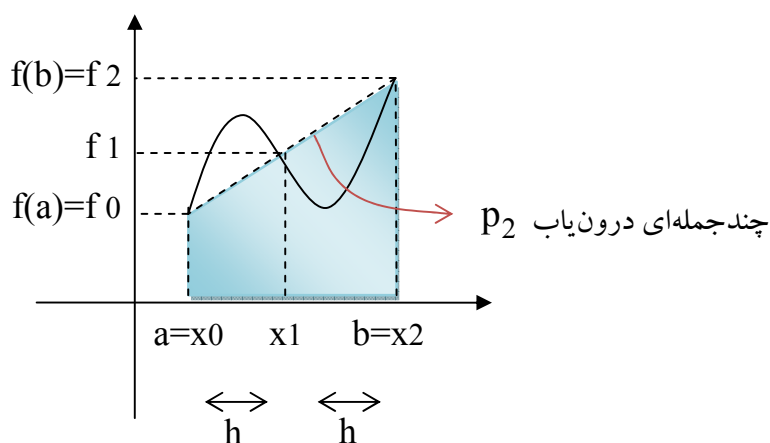
با فرض $x_{i+1} - x_i = h$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f_0 + f_1]$$

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = h \\ x_2 - x_1 = h \end{cases} \quad \text{یعنی فاصله‌ها مساویند}$$

۲- اگر از سه نقطه گرهی $b = x_2$ و x_1 و $a = x_0$ استفاده کنیم (در چندجمله‌ای درون‌یاب) فرمول انتگرال‌گیری سیمسون را داریم:

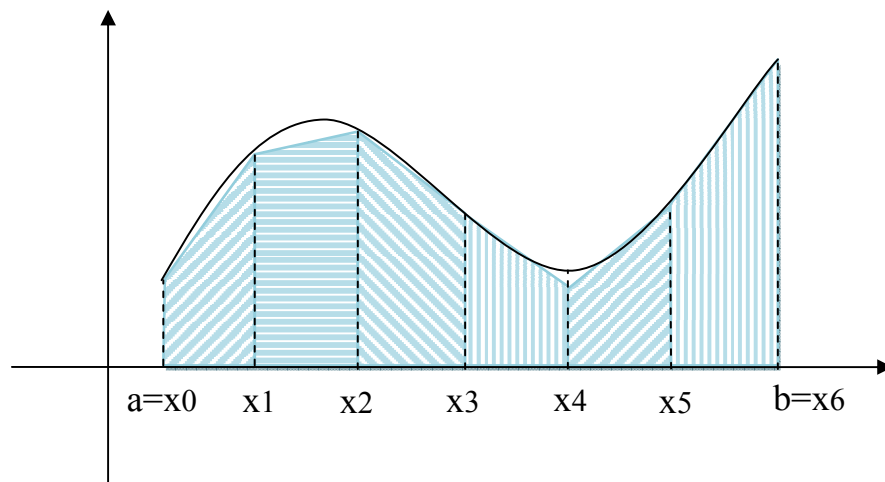
$$h = \frac{b-a}{2} \quad \text{نقطه ۳}$$



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$$

روش ذوزنقه‌ای مرکب

نقطه ابتدا و انتها تنها یک بار جمع می‌شوند.



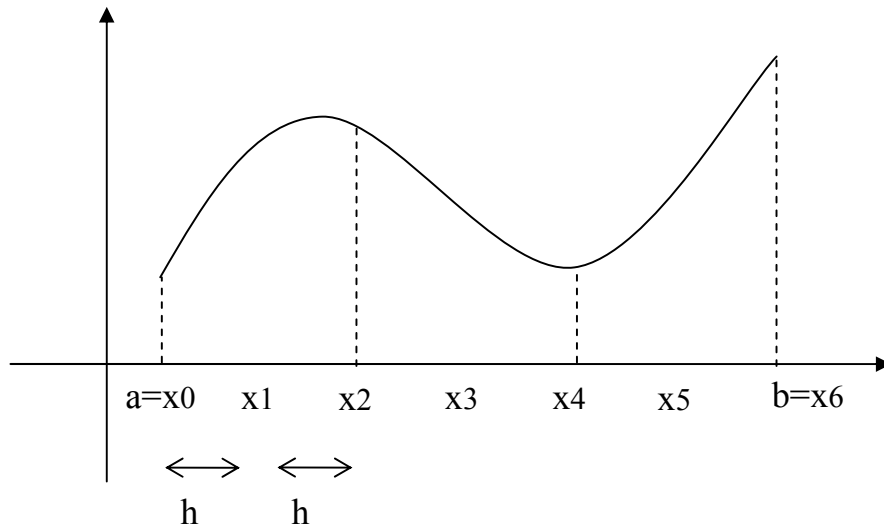
$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_{i+1} - x_i = h \quad i=0,1,\dots,n-1$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{2}[f_0 + f_1] + \frac{h}{2}[f_1 + f_2] + \dots + \frac{h}{2}[f_{n-1} + f_n] \\ &\approx \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n] \end{aligned}$$

روش سیمپسون مرکب

تعداد نقاط فقط باید فرد باشد.



$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2] + \frac{h}{3} [f_2 + 4f_3 + f_4] + \frac{h}{3} [f_4 + 4f_5 + f_6] \\ &= \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6] \end{aligned}$$

مثال: مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را به روش سیمپسون و با شرایط زیر حل کنید.

(الف) تقسیم فاصله به ۶ قسمت

(ب) تقسیم فاصله به ۴ قسمت (حل این قسمت)

$$\text{فاصله ۴ قسمت} \quad n=4 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4] = \frac{\pi}{24} [0 + 4(0/38) + 2(0/7) + 4(0/92) + 1]$$

x_i	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$3\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
f_i	0	0/38	0/7	0/99	1

خطای انتگرال گیری روش های دوزنقه ای سیمسون

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f_0 + f_1] + E_I \quad \text{دوزنقه}$$

$$E_I = -\frac{h^3}{12} f''(\alpha) \quad a \leq \alpha \leq b \quad \text{خطای دوزنقه ای ساده}$$

$$\text{If } f''(\alpha) = 0 \Rightarrow E_I = 0 \quad \text{تابع خطی}$$

توجه: روش انتگرال گیری دوزنقه ای برای چند جمله ای های خطی دقیق است.

$$\text{مثلاً} \quad \int_1^{1000} (x+6) dx \quad h = 0/1$$

$$= \frac{x^2}{2} + 6x \Big|_1^{1000} = \left[\frac{(10000)^2}{2} + 6(10000) - \left(\frac{1}{2} + 6 \times 1 \right) \right]$$

خطای ذوزنقه‌ای مرکب Trapezoidal

بازه n قسمتی است

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \underbrace{[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n]}_{T(h)} + \underbrace{E}_{E(T(h))}$$

$$E(T(n)) = \frac{-nh^3 f''(\alpha)}{12}, \quad \alpha \in [a, b]$$

خطای مرکب هم برای تابع‌های خطی مقدار دقیق می‌دهد.

$$\frac{b-a}{h} = n = -\frac{(b-a)h^2 f''(\alpha)}{12}$$

توجه: برای پیدا کردن $\int_a^b f(x)dx$ به روش ذوزنقه‌ای مرکب با مقدار بازه‌ی n ، کران بالای خطا به صورت زیر است:

$$|E(T(h))| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \quad M_2 = \max_{x \in (a, b)} f''(x)$$

خطای انتگرال‌گیری سیمسون

برای توابع درجه ۳، مقدار انتگرال‌گیری دقیق است.

$$x_1 \leftarrow \int_{x_0=a}^{x_2=b} f(x)dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2] + E_I$$

خطای سیمسون ساده

$$E_I = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\alpha), \quad \alpha \in [a, b] \quad \text{یا} \quad a < \alpha < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{n-1} + f_n] + E(S(h))$$

$$E(S(h)) = \frac{-nh^5 f^4(\alpha)}{180} = \frac{-(b-a)h^4 f^4(\alpha)}{180}, \quad a < \alpha < b$$

کران بالای انتگرال گیری سیمسون برای $\int_a^b f(x)dx$ با n بازه (n زوج) به صورت زیر است:

$$|E(S(h))| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|$$

$$\left[\frac{b-a}{h}\right] = n$$

دنبال عدد صحیح می گردیم و تعداد بازه ای که می خواهیم بیشتر باشد در واقع جزء صحیح مقدار کمتری دارد.

$$[7/6] + 1 = 8$$

$$\text{یعنی} \quad h = \frac{b-a}{8} = 0.125 = \frac{1}{8}$$

n را که بیشتر کردیم، h کمتر می شود.

مثال: برای محاسبه $\int_0^1 \sin x^2 dx$ به روش دوزنقه مرکب طول گام h چقدر باشد به طوری که خطا از 10^{-4} کمتر باشد؟

$$|E(T(h))| < \frac{b-a}{12} h^2 M^2 < 10^{-2}$$

$$M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| < 6$$

$$f'(x) = 2x \cos x^2$$

$$f''(x) = 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$$

$$|f''(x)| = |2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2|$$

تابع $\cos x$ و $\sin x$ را از یک کمتر می گیریم:

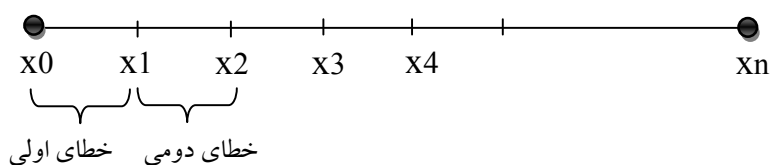
$$\rightarrow |f''(x)| < 2|\cos x^2| + 4x^2|\sin x^2| < 6$$

$$x^2 = \frac{\pi}{4} \quad \sqrt{2} + \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{h^2}{12} 6 < 10^{-2} \rightarrow h^2 < 2 \times 10^{-2} \rightarrow h = 0.14$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{0.14} = \frac{100}{14} = 7.14 \rightarrow n = 8 \rightarrow h = \frac{1}{8}$$

چون n زوج است، تعداد بازه‌هایی که انتگرال گیری می کنیم، $\frac{n}{2}$ است.



بر اساس قضیه مقدار میانی

$$E(S(h)) = -\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{h^5 f^4(\alpha_i)}{90} = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^4(\alpha_i) \quad *$$

$$f^4(x) = M, \quad f^4(x) = m$$

$$x \in [a, b] \quad x \in [a, b]$$

$$\left. \begin{array}{l} m \leq f^4(d_1) \leq M \\ \text{مینیم} \qquad \qquad \text{ماکزیمم} \\ \frac{n}{2}m \leq \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^4(\alpha_i) \leq \frac{n}{2}M \end{array} \right\} \Rightarrow m \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^4(\alpha_i) \leq M$$

$$f^4(\beta) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^4(\alpha_i)$$

$$\beta \in [a, b]$$

$$* = -\frac{nh^5}{2(90)} f^4(\beta) = -\frac{nh^5}{180} f^4(\beta) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^4(\beta)$$

روش ضرایب مجهول نیوتن کاتس

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1) \approx W_0 f_0 + W_1 f_1$$

برای تابع $f(x)=1$ و $f(x)=x$ هم دقیق باشد، یعنی مقدار دقیق انتگرال را به ما بدهد.

w_0 ، w_1 را چنان بیابیم که فرمول انتگرال گیری برای چند جمله ای های خطی دقیق باشد. فرض می کنیم $f(x)=1$ باشد.

$$\begin{array}{l} f(x)=1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_1} 1 dx = w_0 + w_1 = h = x_1 - x_0 \\ \int_{x_0}^{x_1} x dx = w_0 x_0 + w_1 x_1 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} \end{array} \right. \end{array}$$

۲ مجهول داریم $w_1 = w_0 = \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{h}{2}$ معادله،

روش ذوزنقه‌ای ساده $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f_0 + f_1]$

$$\begin{cases} -w_0 x_0 - x_0 w_1 = -x_0(x_1 - x_0) = -x_0 x_1 + x_0^2 \\ w_0 x_0 + x_1 w_1 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} \end{cases}$$

\Rightarrow جمع می‌کنیم $w_1(x_1 - x_0) = -x_0 x_1 + x_0^2 + \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$

داریم: $2w_1(x_1 - x_0) = x_0^2 + x_1^2 - 2x_0 x_1$

$\xrightarrow{x-} 2w_1(x_1 - x_0) = (x_1 - x_0)^2$

$w_1 = \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{h}{2} \quad \& \quad w_0 = \frac{h}{2}$

h فاصله بین دو نقطه است.

* $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \approx w_0 f_0 + w_1 f_1$

فرمول نیوتن کاتس سه نقطه‌ای:

h فاصله نقطه‌ها از همدیگر است.

$x_1 \leftarrow \int_{a=x_0}^{b=x_2} f(x) dx \approx w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2$



$$f(x)=1 \rightarrow \begin{cases} \int_{x_0}^{x_2} 1 dx = w_0 + w_1 + w_2 \\ \int_{x_0}^{x_2} x dx = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} \\ \int_{x_0}^{x_2} x^2 dx = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 \end{cases}$$

$$w_0 = \frac{h}{3}, \quad w_1 = \frac{4h}{3}, \quad w_2 = \frac{h}{3}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2] \quad \text{روش سیمسون}$$

فرمول نیوتن کاتس $\frac{3}{8}$ سیمسون: اگر همین مراحل را برای فرمول

$$\begin{matrix} x_2 \leftarrow \\ x_1 \leftarrow \end{matrix} \int_{a=x_0}^{b=x_3} f(x) dx = w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3$$

انجام دهیم، فرمول انتگرال گیری $\frac{3}{8}$ سیمسون را به دست می آوریم:

$$\begin{matrix} \text{دقیق} \\ \left\{ \begin{array}{l} f = 1 \\ f = x \\ f = x^2 \\ f = x^3 \end{array} \right. \end{matrix} \quad \therefore \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3]$$

ارتباط کلی بین خطاهای نیوتن کاتس

$$\begin{aligned}
 & \nearrow (n+1) \quad \text{برای خطی} \\
 n=1 \quad & \text{خطای نیوتن کاتس ۲ نقطه (ذوزنقه)} = M_1 h^3 f^{(2)}(\alpha) \\
 & \nearrow (n+2) \quad \text{برای درجه ۲ و ۳} \\
 n=2 \quad & \text{خطای نیوتن کاتس ۳ نقطه‌ای (سیمسون)} = M_2 h^5 f^{(4)}(\alpha) \\
 & \nearrow (n+1) \quad \text{برای درجه ۳} \\
 n=3 \quad & \text{خطای نیوتن کاتس ۴ نقطه } \left(\frac{3}{8} \text{ سیمسون}\right) = M_3 h^5 f^{(2)}(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$|M_2| < |M_3|$$

∴ پس روش سیمسون از روش $\frac{3}{8}$ سیمسون دقیق‌تر است.

توجه: در فرمول‌های نیوتن کاتس نقاط X_0, X_1, \dots, X_n ، معلوم بوده، با فواصل مساوی که (h) است.

اما در روش گوس هم ضرایب مجهول هستند و هم نقاط.

a و b را به جای X_1, X_0 می‌گذاریم، چون معلوم نیست و ممکن است X_1, X_0 بین a و b باشد.

$$\int_{x_0 \neq a}^b f(x) dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

اکنون چهار مجهول داریم که با تشکیل ۴ معادله این مجهول‌ها به دست می‌آید. معادلات را به گونه‌ای می‌نویسیم که این فرمول انتگرال‌گیری تا درجه حداکثر ۳ دقیق باشد. فرض کنید $(b=1, a=-1)$ باشد:

۴ معادله، ۴ مجهول داریم. نهایتاً ضرایب و نقاط را به دست می‌آوریم.

تابع در این نقاط تعریف می شود و با فرض پیوستگی تابع برایمان مبرهن شده است.

مهم:

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = x \\ f(x) = x^2 \\ f(x) = x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^1 1 dx = w_0 + w_1 \\ \int_{-1}^1 x dx = w_0 x_0 + w_1 x_1 \\ \int_{-1}^1 x^2 dx = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \\ \int_{-1}^1 x^3 dx = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 \end{cases}$$

پس از حل دستگاه ۴ معادله و چهار مجهول فوق، ضرایب و نقاط به صورت زیر تعیین می شوند:

$$w_0 = w_1 = 1$$

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

چند جمله ای از درجه ۳ هم، مقدار دقیق است.

تغییر متغیر:

$$\int_a^b f(x) dx, \quad x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)] \rightarrow dx = \frac{1}{2}(b-a)du$$

$$\begin{cases} u = -1 \rightarrow x = a \\ u = 0 \rightarrow x = 2b \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b-a) \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)]\right) du$$

تمرین: فرمول قاعده ۲ نقطه‌ای گاوس را به دست آورید و سپس انتگرال $\int_{a=1}^{b=2} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ را با این روش تقریب بزنید.

$$\int_{a=1}^{b=2} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}(2-1) \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(u+3)\right) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}\right)} du$$

کران انتگرال از ۱- تا این است.

$$\int_1^2 \frac{\sin^2 x}{x} dx \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{2}\right)} + \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{2}\right)} \right]$$

سؤال: مقدار انتگرال روبه‌رو را با روش دونقطه‌ای گاوس حساب کنید.

$$\int_1^2 (x^3 + 2x^2 + 5) dx$$

* از آنجایی که روش ۲ نقطه‌ای گاوس برای چندجمله‌ای‌های با درجه ۳ دقیق است، بنابراین کافی است انتگرال معمولی را حساب کنید.

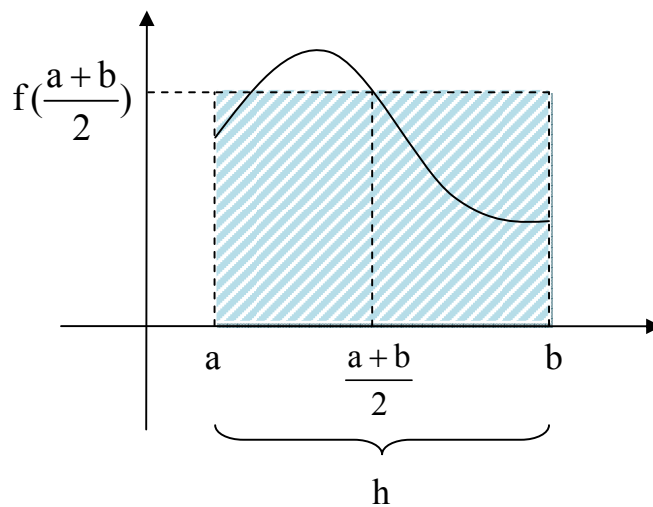
فرمول قاعده‌ی ۳ نقطه‌ای گاوس :

تقارن در این روش برای جواب‌ها واجب است.

$$\int_{a=-1}^{b=1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{6}f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

توجه: فرمول انتگرال‌گیری گاوس تا درجه حداکثر ۵ دقیق است.

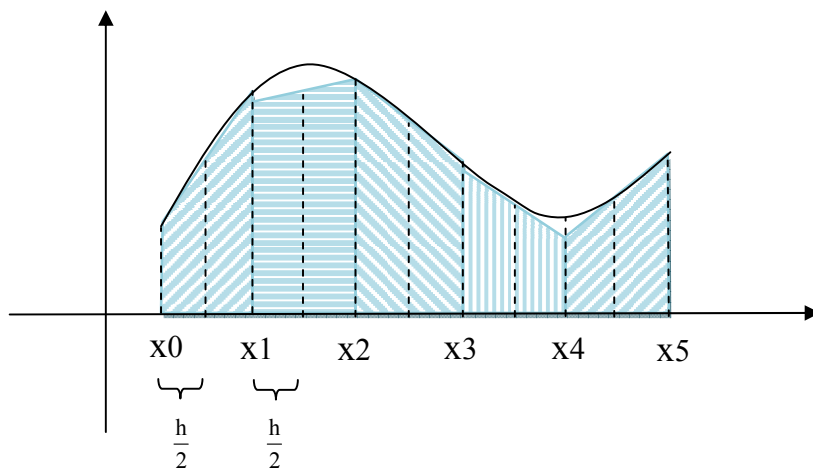
قاعده نقطه میانی



$$\int_a^b f(x)dx = hf\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

قاعده نقطه میانی ساده

قاعده نقطه میانی مرکب چیست و فرمول خطا قاعده نقطه میانی مرکب را به دست آورید.



$$x_{i+1} - x_i = h \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} M(h) &= h \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right] \\ &= h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad h = \frac{1}{4}$$

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
f_i					

$$\frac{1}{4} \left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{25}{64} + \frac{49}{64} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{84}{64} = \frac{84}{256}$$

خطای نقطه میانی مثل خطای دوزنقه‌ای است اما ضریبش کوچکتر است.

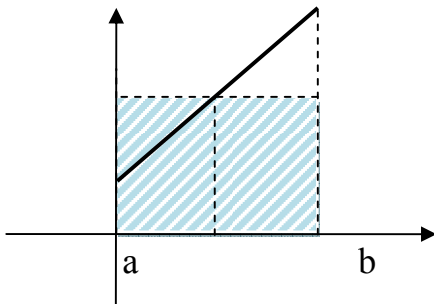
خطا در قاعده نقطه میانی ساده

$$E_I = \frac{h^3}{24} f''(\alpha) \quad \alpha \in [a, b]$$

خطا در قاعده نقطه میانی مرکب

$$\begin{aligned} E(M(h)) &= \frac{nh^3}{24} f''(\beta) \quad \beta \in [a, b] \quad nh = (b-a) \\ &= \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\beta) \end{aligned}$$

روش قاعده نقطه میانی تا درجه یک دقیق است و خطای آن برابر صفر است.



سؤال: کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

الف) برای محاسبه $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ می‌توان از قاعده ذوزنقه‌ای استفاده نمود.

ب) برای محاسبه $\int_1^2 \frac{\sin x}{x-1} dx$ می‌توان از قاعده سیمسون استفاده نمود.

✓ ج) دقت روش سیمسون از روش ذوزنقه بیشتر است.

د) همواره روش سیمسون و روش ذوزنقه جواب‌های یکسانی برمحاسبه انتگرال به‌دست می‌دهند.

فصل پنجم: حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

هدف: حل عددی معادلات به فرم:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

به $y(x_0) = y_0$ شرط اولیه می گویند.

مثال:

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{cases} y' = ce^{\frac{1}{2}x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = ce^{\frac{1}{2}(0)^2} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

روش تکرار پیکارد

می توانیم $y' = f(x, y)$ را به صورت $y' = f(x, y(x))$ نوشت و از آن نتیجه می شود: $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$

$$\int_{x_0}^x dy = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) \cdot y(t) dt$$
$$y_0 = y(t)$$

نتیجه:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

...

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = xy^2 + 2y \\ y(1) = 2 \end{cases}$ را از روش تکرار پیکارد و تا y_2 به دست آورید.

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = 2 + \int_1^x 4t + 4 = 2 + 2t^2 + 4t \Big|_1^x = 2x^2 + 4x - 4$$

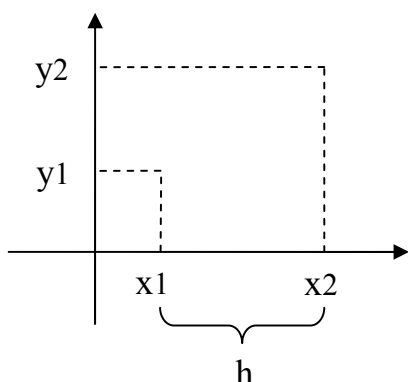
$$y_2 = y_0 + \int_1^x t(2t^2 + 4t - 4)^2 + 2(2t^2 + 4t - 4) dt$$

انتگرال را به دست می آوریم

روش تک گامی

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y \end{cases}$$

ساده ترین روش روش تک گامی روش اویلر می باشد. اگر داشته باشیم $x = x_0$ آن گاه $y = y_0(x)$ در این روش (اویلر)، h را طول گام می گویند.



$$x_2 = x_1 + h$$

$$x_1 = x_0 + h \Rightarrow y_1 = y(x_0 + h)$$

$$y_1 \approx y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

...

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

مثال: فرض کنید $h=0/4$ مقدار تقریبی $y(2/8)$ را برای معادله دیفرانسیل زیر به روش اویلر به دست آورید.

$$\begin{cases} y' = xy^2 + y \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = 3$$

$$x_1 = x_0 + h = 2 + 0/4 = 2/4$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 3 + 0/4(2 \times (3)^2 + 2) = 3 + 0/4(21) = 11/4$$

$$x_2 = x_1 + h = 2/8$$

$$y_2 = 11/4 + 0/4[(2/4)(11/4)^2 + 11/4] = 140/72$$

روش بست تیلور

فرمول کلی:

$$y_0(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_0)$$



مثال: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} y' = (e^x)^y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

الف) با استفاده از بست تیلور مرتبه ۳ و $h = 0/1$ تخمینی از $y(0/1)$ را به دست آورید.

$$x_0 = 0, \quad n = 0/1$$

$$\begin{cases} y(0/1) \rightarrow y(x_0 + h) = y_0 + hy'(0) + \frac{h^2}{2!} y''(0) + \frac{h^3}{3!} y'''(0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y'(x) = e^{x(y(x))} \rightarrow y'(0) = e^{0^1} = 1^0$$

$$y''(x) = [e^{x(y(x))}]' = [y(x) + xy'(x)]e^{xy(x)} = [y(0) + 0y'(0)]e = 1^{ay(0)}$$

$$y'''(x) = [y(x) + xy'(x)e^{xy(x)}]' = [y'(x) + y'(x) + xy''(x)]e^{xy(x)} + [y(x_0) + xy'(x)]^2$$

$$y''' = (1 + 1 + 0)e^{0(1)} + (1 + 0)e = 3$$

$$y(0/1) + (0/1)(1^0) + \frac{(0/1)^2}{2}(1) + \frac{0/1}{6} \times 3$$

$$\frac{h^4}{24} f''''(0)$$

ب) خطای y را تقریب بزنید.

روش‌های رنگه کوتاهی مرتبه ۲

طول گام h

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = h(f(x_0, y_0)) \\ k_2 = h(f(x_0 + h, y_0 + k_1)) \end{cases}$$

$$y = y(x_0 + h) \rightarrow y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

مثال: $\begin{cases} y' = 4e^{0.8x} - 0.5y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ را با انتخاب $h=0.5$ به روش رونگه کوتای ۲ حل کنید.

$$k_1 = 0.5(4e^{0.8(0)} - 0.5 \times (2)) = 1/5$$

$$k_2 = h(f(\underbrace{x_0 + h}_{0.5}, \underbrace{y_0 + k_1}_{0.5})) = 0.5(4e^{0.8(0.5)} - 0.5 \times (3/5)) = 1/95$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 2 + \frac{1}{2}(1/5 + 1/95) = 3/72$$

فصل ششم: حل عددی دستگاه‌های معادلات خطی

روش ژاکوبی

در این روش باید یک نقطه شروع برای X داشته باشیم که هم می‌تواند ذکر شده باشد و هم می‌توانیم آن را خودمان بگیریم.

این روش را با ذکر یک مثال توضیح می‌دهیم:

مثال: جواب دستگاه زیر را به روش ژاکوبی تا دو مرحله حل کنید.

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{فرض می‌کنیم که:}$$

$$(1) \begin{cases} -4x_0 + 12x_2 - 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 = 12 \\ -6x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 = \frac{12 - 4x_2}{7} \\ x_2 = \frac{4x_1 + 6x_3}{12} \\ x_3 = \frac{6x_2}{14} \end{cases}$$

$$Z \text{ را در } 2 \text{ قرار می‌دهیم} \quad (3) \begin{cases} x_1 = \frac{12 - 4}{7} = 1/14 \\ x_2 = \frac{4 + 6}{12} = 0/83 \\ x_3 = \frac{6}{14} = 0/42 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{12 - 4(0/83)}{7} \\ x_2^{(2)} = \frac{4(1/14) + 6(0/42)}{12} \\ x_3^{(2)} = \frac{6(0/83)}{14} \end{cases}$$

روش گاوس سایدل

در این روش به جای X_2, X_3 عدد همان مرحله را که به دست آوردیم جای گذاری می کنیم.

توجه: شرط همگرایی روش های گاوس سایدل و ژاکوبی: قطر غالب سطری اکید است یعنی:

$$|a_{ij}| > \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad i \neq j$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{مثال:}$$

یعنی جمع هر دو عدد سطر از قدر مطلق قطر اصلی کمتر باشد، در غیر این صورت باید جابجا کنیم.

مثال: با انجام تغییرات لازم در دستگاه معادلات خطی زیر آن را به روش گاوس سایدل با انجام سه تکرار چنان حل کنید که دنباله حاصل همگرا به جواب واقعی دستگاه باشد.

$$g = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{نقطه دلخواه:}$$

$$(1) \begin{cases} -4x + 12y - 6z = 0 \\ -7x - 4y = 12 \\ -6y + 14z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} -7x - 4y = 12 \\ -4x + 12y - 6z = 0 \\ -6y + 14z = 0 \end{cases} \quad \text{جابجا شده (۱)}$$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{12+4y}{-7} \\ y = \frac{4x+6z}{12} \\ z = \frac{6y}{14} \end{cases}$$

g را در معادله قرار می‌دهیم \rightarrow

$$(4) \begin{cases} x^1 = \frac{12}{-7} = 1/14 \\ y^1 = \frac{-4(1/71)+6(0)}{12} = 0/57 \end{cases}$$

فصل هفتم : مقادیر و بردارهای ویژه یک ماتریس

اگر A یک ماتریس مربعی باشد برای به دست آوردن مقدار ویژه ماتریس معادله $|A - \lambda I| = 0$ را حل می کنیم. مقادیر λ که به دست می آید، مقادیر ویژه است.

بردار ویژه : اگر برای یک λ (مقدار ویژه) بردار x غیر صفر موجود باشد که $Ax = \lambda x$ ، یک بردار ویژه متناظر با λ نامیده می شود.

مثال: مقدار ویژه ماتریس $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ را به دست آورید.

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \quad \lambda = 2, \lambda = 3$$

روش توانی برای به دست آوردن بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدر مطلق را با یک مثال حل می کنیم.

مثال: بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدر مطلق را برای ماتریس زیر تقریب برآیند تا دو مرحله به دست آورید.

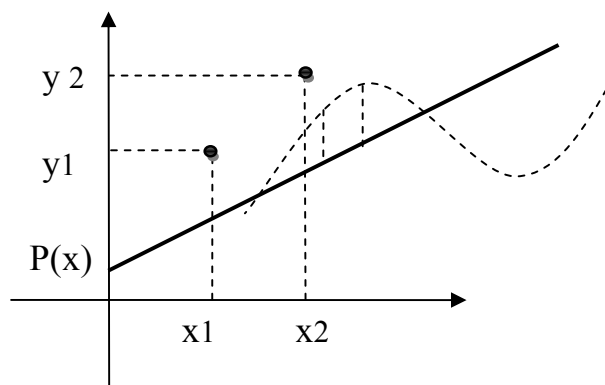
$$x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{نقطه شروع :}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = A(x)^0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 \\ 17 \\ 10 \end{vmatrix} \quad \alpha_0 = 17 \quad \text{بزرگترین}$$

$$(1) \quad x_1 = \frac{A(x)^0}{17} \rightarrow Ax_1^{(1)} = \begin{vmatrix} 5 \\ 9/5 \\ 7/8 \end{vmatrix} \rightarrow x_1 = 9/5 \rightarrow x^2 = \frac{Ax^{(1)}}{\alpha_1} \begin{vmatrix} 0/52 \\ 1 \\ 0/83 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad x_1 = \begin{vmatrix} \frac{7}{17} \\ \frac{17}{17} \\ \frac{10}{17} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0/41 \\ 1 \\ 0/59 \end{vmatrix} \rightarrow Ax^2 = \begin{vmatrix} 5/7 \\ 11/6 \\ 8/4 \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = 11/6 \rightarrow \alpha_2 = 11/6$$

فصل هشتم : برازش منحنی



تابع جدولی زیر مفروض است:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

هدف پیدا کردن خط کمترین مربعات است یعنی خطی با ضابطه $p(x) = Ax + B$ به شرطی که مجموع زیر
مینیمم شود:

$$E(A, B) = \sum_{i=1}^n p(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Ax + B - y_i)^2$$

$$\frac{dE}{dA} = \sum_{i=1}^n 2(x_i)(Ax_i + B - y_i) = 0 \rightarrow 2A \sum_{i=0}^n x_i^2 + 2B \sum_{i=0}^n x_i - 4 \sum_{i=0}^n x_i y_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dB} = \sum_{i=1}^n 2(Ax_i + B - y_i) = 0 \rightarrow A \sum_{i=0}^n x_i + nB - \sum_{i=0}^n y_i = 0 \quad (2)$$

مثال: خط کمترین مربعات را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	1	2	3	6
y_i	3	0	-1	1

$$(1) \sum_{i=0}^n x_i^2 = 57, \quad \sum_{i=0}^n x_i = 13, \quad \sum_{i=0}^n x_i y_i = 5$$

$$(2) \sum_{i=0}^n y_i = 3$$

$$\begin{cases} 57A - 13B = 5 \\ 13A + 4B = 3 \end{cases}$$

بعد از محاسبه A و B را در $y = Ax + B$ قرار می دهیم.

سهمی کمترین مربعات:

برای تابع جدولی مفروض یک چندجمله ای به فرم $p(x) = Ax + B$ پیدا می کنیم که تابع زیر را مینیمم کند.

$$\sum (A, B, C) = \sum (Ax_i^2 + Bx_i + C - y_i)^2$$

$$\begin{cases} (1) \frac{dE}{dA} & \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) A + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) B - \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) C = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ (2) \frac{dE}{dB} & \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) A + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) B - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) C = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ (3) \frac{dE}{dC} & \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) A + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) B + nC = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

مثال: سهمی کمترین مربعات را برای ۴ نقطه $(-3,3)$ و $(0,1)$ و $(2,1)$ و $(4,3)$ به دست آورید.

x_i	0	2	-3	4
y_i	1	1	3	3

$$\sum_{i=1}^4 x_i^4 = 353, \quad \sum_{i=1}^4 x_i^3 = 45, \quad \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 29, \quad \sum_{i=1}^4 x_i^2 y_i = 79$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 5, \quad \sum_{i=1}^4 y_i = 8$$

$$\begin{cases} 353A + 45B + 29C = 79 \\ 45A + 29B + 3C = 5 \\ 29A + 3B + \sum_{n=4}^{\infty} C = 8 \end{cases}$$

بعد از به دست آوردن A و B و C را در $y = Ax^2 + B + C$ قرار می دهیم.

خطی سازی داده ها

برازش منحنی را برای جدول جدید به دست می آوریم.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$\ln y_i = Y_i$	Y_1	Y_2	...	Y_n

$$y = C \exp(Ax) = Ce^{Ax}$$

$$\ln y = \ln(Ce^{Ax})$$

$$\ln y = \ln C + \ln e^{Ax}$$

$$Y = \ln y = Ax + \ln C$$

$$Y = AB + B$$

$$\ln C = B \rightarrow C = e^B$$

$$y = Ce^{Ax}$$

مثال: از روش خطی سازی داده ها برای پیدا کردن برازش های نمایی تابع جدولی زیر استفاده کنید.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1/5	2/5	3/5	5	7/5

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 30, \quad \sum_{i=1}^5 x_i = 10, \quad \sum_{i=1}^5 x_i Y_i = 16/3, \quad \sum_{i=1}^5 Y_i = 6/2$$

$$\begin{cases} 30A + 10B = 16/3 \\ 10A + 5B = 6/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = 0/39, \quad B = 0/46, \quad C = e^{0/46} = 1/58$$

$$y = Ce^{Ax} = 1/58 e^{0/39x}$$

x_i	0	1	2	3	4
$\ln y_i = Y_i$	0/4	0/91	1/25	1/6	2/01

مثال: می‌خواهیم برازشی به فرم $Ax^3 + B = y$ برای یک تابع جدولی پیدا کنیم، ضرایب A و B با چه معادله‌ای تعیین می‌شوند؟

$$E(A, B) = \sum (Ax_i^3 + B - y_i)$$

$$\frac{dE}{dA} = \sum 2(x_i^3)(Ax_i^3 + B - y_i) = 0 \rightarrow 2(\sum x_i^6)A + (\sum x_i^3)B + 4x_i^3 y_i = 0$$

$$\frac{dE}{dB} = \sum 2(Ax_i^3 + B - y_i) = 0 \rightarrow \sum x_i^3 A + nB = \sum_{i=1}^n y_i$$

سؤال: چندجمله‌ای لاگرانژ بنویسید که از نقاط (x_0, f_0) و (x_1, f_1) و (x_2, f_2) بگذرد و سپس عبارت

$$\frac{3x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

را به صورت جمع جبر با چند کسر جزئی بیان کنید.

حل: چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = 3x^2 + x + 1$ را در نقاط گره‌ای $x_0 = 1$ و $x_1 = 2$ و $x_2 = 3$ می‌نویسیم. چندجمله‌ای به دست آمده با خود تابع یکی است و می‌توان کسر جایگزین کرد.

$$L_0 = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

$$L_1 = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

سلامتی و تعجیل در فرج آقا امام زمان (عج) صلوات

x_i	1	2	3
y_i	5	15	31

$$p_2(x) = f_0 L_0 + f_1 L_1 + f_2 L_2$$

$$p_2(x) = \frac{5}{2}(x-2)(x-3) - 15(x-2)(x-3) + \frac{31}{2}(x-1)(x-2)$$

تمرین: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است:

$$\begin{cases} y' = 2y \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

اولاً جواب واقعی را محاسبه کنید. h تا چه اندازه کوچک انتخاب شود تا جواب تقریب به دست آید. از روش اویلر تا ۴ رقم اعشار صحیح باشد.

$$\frac{dy}{dx} = 2y \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2dx \rightarrow \ln y = 2x \times 0 \rightarrow C = 0$$

$$\ln y = 2x$$

خطا:

$$E = \frac{y''(\alpha)}{2!} + h^2 \quad y(0) + hy'(0) + \frac{h^2 y''(0)}{2!}$$

$$|E| < \frac{h^2}{2} \max y''(\alpha) \quad y(x) = e^{2x}, \quad y'(x) = 2e^{2x}$$

$$|E| < \frac{h^2}{2} 4e^2 = 14/77 h^2 < \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 4e^2$$

$$\max |y'(\alpha)| = 4e^2$$

$$h^2 < \frac{1^2}{2 \times 14/77} \times 10^{-4} \rightarrow h < 10^{-2} \sqrt{\frac{1}{2 \times 14/77}} = 18 \times 10^{-4}$$

طول گام h

