Www.iepnu.com

Manual Solution

Queuing Systems by Prof. Iravani

Author: **Amirhossein Moosavi**

Karaj Islamic Azad University

Teaching supervisor: Dr. Hamed Tayebi

Thanks to my dear friend Shahab Siasi

فصل اول

۱- با توجه به اینکه گلوله‌ی برداشته شده در مرحله‌ی اول جایگذاری می‌شود و سپس گلوله‌ی دوم برداشته می‌شود، گزینه‌های خروج در مرحله‌ی دوم نیز هم چون مرحله‌ی اول می‌باشد:

$$S=\{(R,R),(R,G),(R,B),(G,G),(G,R),(G,B),(B,B),(B,R),(B,G)\}$$

با توجه به اینکه فضای نمونه‌ی توصیف شده در بالا دارای 9 عضو می‌باشد، پس احتمال رخ دادن هرکدام از اعضا 1/9 است.

هم چون سؤال 1

2- حال اگر گلوله‌ی خارج شده در مرحله‌ی اول را جایگذاری نکنیم، فضای نمونه به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$S=\{(R,G),(R,B),(G,R),(G,B),(B,R),(B,G)\}$$

3- احتمال اینکه یک سکه سالم در سومین و چهارمین پرتاب برای اولین بار دو شیر پشت سر هم بیاید به صورت زیر محاسبه می‌شود:

P{ن = 4} = P{(خط، خط، شیر، شیر)} + P{(شیر، خط، شیر، شیر)}

$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^4+\left(\tfrac{1}{2}\right)^4=\tfrac{1}{8}$$

4-

الف) اگر بخواهیم فقط حادثه‌ی F رخ بدهد (یعنی حوادث G و E رخ ندهند)، پس خواهیم داشت:

$$F\cap(E\cup G)^c$$

ب) اگر بخواهیم تنها حوادث E، F رخ بدهند (یعنی حادثه‌ی G رخ ندهد)، پس خواهیم داشت:

$$E\cap F\cap G^c$$

ج) اگر بخواهیم که حداقل یک حادثه رخ دهد، خواهیم داشت:

$$E\cup F\cup G$$

د) اگر بخواهیم از حادثه‌های موجود حداقل دوتا رخ دهد، خواهیم داشت:

$$(E\cap F)\cup(E\cap G)\cup(F\cap G)$$

ه) اگر بخواهیم هر سه حادثه رخ دهد، خواهیم داشت:

$E \cap F \cap G$

و) اگر بخواهیم هیچ حادثه‌ای رخ ندهد، بدین ترتیب خواهیم داشت:

$E^c \cap F^c \cap G^c$

ز) اگر بخواهیم حداکثر ۱ حادثه از میان سه حادثه‌ی موجود رخ بدهد، خواهیم داشت:

$(E \cap F)^c \cap (E \cap G)^c \cap (F \cap G)^c$

ح) اگر بخواهیم که حداکثر دو حادثه رخ بدهد، خواهیم داشت:

$(E \cap F \cap G)^c$

5- الف) با توجه به اینکه بازی مورد بحث براساس احتمال آمدن شیر در یک سکه سالم صورت می‌پذیرد احتمال پیروزی به قرار زیر است:

$$P\,(\text{احتمال برنده شدن شخص}) = \underbrace{1/2}_{\text{احتمال شیر آمدن در مرحله‌ی اول}} + \underbrace{1/2}_{\text{احتمال خط آمدن در مرحله‌ی اول}} \times \underbrace{1/2}_{\text{احتمال شیر آمدن در مرحله‌ی دوم}} = 3/4$$

ب) جالب توجه است که شخص در صورت برنده شدن (چه در مرحله‌ی اول و یا چه در مرحله‌ی دوم) تنها ۱ تومان برنده می‌شود در صورتی که اگر وی بازنده باشد (لازم به ذکر است که این شخص تنها در مرحله‌ی سوم بازنده می‌شود و بازی به اتمام می‌رسد) ۳ تومان می‌بازد. بدین ترتیب این بازی عادلانه به نظر نمی‌رسد.

6- همانطور که می‌دانیم عبارت $(F \cup G)$ نشان دهنده‌ی رخ دادن یکی از دو حادثه‌ی مورد بحث است. از طرف دیگر عبارت $E \cap (F \cup G)$ نشان دهنده‌ی رخ دادن E در کنار یکی از حوادث F و یا G می‌باشد. به راحتی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که عبارت $E \cap (F \cup G)$ معادل عبارت $(E \cap F) \cup (E \cap G)$ است. عبارت $(E \cap F) \cup (E \cap G)$ نشان دهنده‌ی رخ دادن حوادث E, F و یا E و G به صورت همزمان است.

7- عبارت $(E \cup F)$ نشان دهنده‌ی رخ دادن یکی از دو حادثه‌ی E یا F می‌باشد؛ بدین ترتیب عبارت $(E \cup F)^c$ نشان دهنده‌ی رخ ندادن هر دو حادثه‌ی E, F می‌باشد. کاملا مشخص است که این عبارت معادل عبارت $(E^c \cap F^c)$ است. عبارت $E^c \cap F^c$ نشان دهنده‌ی رخ ندادن E, F به صورت همزمان است.

8- همانطور که می دانیم ، احتمال اجتماع دو حادثه ، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F) \quad \mathrm{I}$$

از طرف دیگر هم می دانیم که هر احتمالی کوچکتر مساوی یک می باشد؛ پس خواهیم داشت:

$$P(E\cup F)\leq 1$$

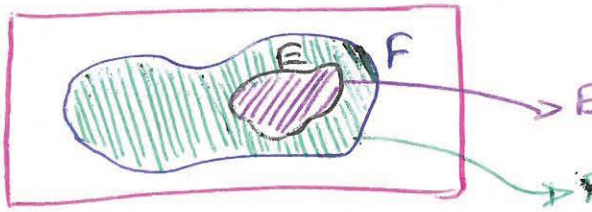
$$\xrightarrow{\mathrm{I}} P(E)+P(F)-P(E\cap F)\leq 1 \Rightarrow P(E\cap F)\geq P(E)+P(F)-1$$

با جایگذاری مقادیر $P(E)=0.9$ و $P(F)=0.8$ ، خواهیم داشت:

$$P(E\cap F)\geq 0.9+0.8-1$$

$$\geq 0.7$$

9- با توجه به این که حادثه ی E زیرمجموعه ی حادثه ی F می باشد ، پس یقینا احتمال رخداد حادثه ی E کوچکتر از احتمال رخداد حادثه ی F خواهد بود ($P(E)\leq P(F)$) . از طرف دیگر ، کاملا بدیهی است که احتمال رخ دادن حادثه ی F برابر احتمال رخ دادن حادثه ی E به علاوه ی احتمال رخدادن اشتراک حادثه ی F و متمم حادثه ی E است. شکل زیر این امر را بهتر تشریح می کند:



در نتیجه خواهیم داشت:

$$P(F)=P(E)+P(F\cap E^c)\geq P(E)$$

10- عبارت $P\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}=P(E_1)+P(E_1^c\cap E_2)+P((E_1^c\cap E_2^c)\ E_3)+\cdots$$

از طرف دیگر عبارت $\sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} P(E_i)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+\cdots$$

کاملا مشخص است که مقدار عبارت اول کوچکتر مساوی عبارت دوم است؛ پس خواهیم داشت:

$$P\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}\leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

11- اگر دو تاس سالم پرتاب شوند ، احتمال آمدن هر کدام از مقادیر 1 تا 6 برابر $1/6$ می باشد. لازم به ذکر است که مجموع مقادیری که این دو تاس می توانند بدست آورند برابر است با:

$$A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

اگر مقدار هر دو تاس برابر 1 باشد

اگر مقدار هر دو تاس برابر 6 باشد

احتمال این که مجموع دو تاس پرتاب شده برابر یکی از مقادیر مجموعه A باشد، با استفاده از تابع زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \begin{cases} \frac{i-1}{36}, & i = 2,\dots,7 \\ \frac{13-i}{36}, & i = 8,\dots,12 \end{cases}$$

به منظور بررسی درستی عملکرد تابع ارائه شده، سناریوهایی ⟵⟶ که مجموع دو تاس پرتاب شده برابر 6 و 9 شده را مورد بررسی قرار داد. برای حالتی که مجموع دو تاس پرتاب شده برابر 6 شده باشد، فضای نمونه زیر وجود خواهد داشت:

$$A_6 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

هم چنین فضای نمونه حالت 9 شدن مجموع دو تاس پرتاب شده به صورت زیر خواهد بود:

$$A_9 = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$$

با توجه به این که فضای نمونه پرتاب دو تاس دارای 36 عضو می‌باشد، پس احتمال 6 و 9 شدن مجموع دو تاس پرتاب شده به ترتیب برابر $5/36$ و $4/36$ می‌باشد.

اگر مقادیر احتمال 6 و 9 شدن مجموع دو تاس پرتاب شده را با استفاده از تابع ارائه شده محاسبه کنیم، صحت عملکرد آن به اثبات می‌رسد. این تابع برای مقادیر دیگر احتمالی قابل بررسی می‌باشد.

12- احتمال برنده شدن در این بازی برابر با احتمال شرطی زیر می‌باشد:

$$P\{\text{برنده شدن}\} = \sum_{i=2}^{12} P\{\text{برنده شدن} \mid \text{مجموع دو تاس برابر } i \text{ شود}\} \times P\{\text{مجموع دو تاس برابر } i \text{ شود}\}$$

از سوال قبل می‌دانیم که مقادیر احتمال برابر شدن مجموع دو تاس پرتاب شده با i برابر چند است. احتمال شرطی برنده شدن اگر مجموع دو تاس برابر i شود نیز از تابع زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{\text{برنده شدن} \mid \text{مجموع دو تاس برابر } i \text{ شود}\} = \begin{cases} 0 & i = 2,3,12 \\ \frac{i-1}{5+i} & i = \ ,5,6 \\ 1 & i = 7,11 \\ \frac{13-i}{19-i} & i = 8,9,10 \end{cases}$$

حال احتمال برابر شدن مجموع دو تاس پرتاب شده با i و احتمال شرطی برنده شدن اگر مجموع دو تاس برابر i شود را برای مقادیر مختلف محاسبه می‌کنیم. مقادیر مورد بحث در جدول زیر ارائه شده‌اند.

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$1/6$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$
	0	0	$1/2$	$2/3$	$5/6$	1	$5/18$	$4/18$	$3/18$	1	0

$P\{$برنده شدن | مجموع دو تاس برابر i شود$\}$

$P\{$مجموع دو تاس برابر i شود$\}$

با توجه به اینکه $P\{$برنده شدن$\}$ برابر $P\{$مجموع دو تاس برابر i شود$\}$ $P\{$برنده شدن | مجموع دو تاس برابر i شود$\}$ است خواهیم داشت:

$P\{$برنده شدن$\}$ $= 1/6\times 0 + 2/36\times 0 + 3/36\times 1/2 + \cdots + 1/36\times 0 = 0.53$

13- احتمال اینکه شخص A برنده بازی باشد، به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$P\{$شخص A برنده شود$\}$ $= \sum_{n=0}^{\infty} P\{$شخص A در $(2n+1)$ امین پرتاب تاس برنده شود$\}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-P)^{2n} P$$

$$= P \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1-P)^2\right]^n$$

به شرطی که $a<1$ باشد می‌دانیم $\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$ پس خواهیم داشت:

$$= P \frac{1}{1-(1-P)^2}$$

$$= \frac{P}{2P-P^2} = \frac{1}{2-P}$$

با توجه به اینکه در این بازی یا شخص A و یا شخص B برنده بازی خواهند بود، احتمال برنده شدن شخص B نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$P\{$شخص B برنده شود$\}$ $= 1 - P\{$شخص A برنده شود$\}$

$$= \frac{1-P}{2-P}$$

14- احتمال به اتمام رسیدن بازی معادل متمم حالتی است که بازی ادامه داشته باشد، یعنی:

$P\{$به اتمام رسیدن بازی$\}$ $= 1 - P\{$ادامه داشتن بازی$\}$

همانطور که در صورت سؤال گفته شده است، بازی در شرایطی ادامه پیدا می‌کند که هر سه نفر در سه پرتاب جواب گرفته، یک شکل را واجد گردند؛ بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$P\{\text{به اتمام رسیدن بازی}\} = 1 - P(\{\text{شیر، شیر، شیر}\} \cup \{\text{خط، خط، خط}\})$$

$$= 1 - (P\{\text{شیر، شیر، شیر}\} + P\{\text{خط، خط، خط}\})$$

اگر سکه سالم باشد، احتمال بالا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$= 1 - \left(\left[\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\right]+\left[\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\right]\right) = 3/4$$

اما بر اساس اینکه در صورت سؤال گفته شده است، سکه سالم نمی‌باشد و احتمال آمدن شیر در این سکه برابر $\frac{1}{4}$ می‌باشد، بدین ترتیب احتمال به اتمام رسیدن بازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{\text{به اتمام رسیدن بازی}\} = 1 - \left(\left[\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\right]+\left[\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\right]\right) = \frac{9}{16}$$

15 - اگر احتمال دختر و یا پسر شدن فرزندان خانواده با هم برابر باشد، یعنی احتمال دختر و یا پسر شدن فرزند برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد. برای حل این مسئله سه حادثه به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A: حادثه‌ی دختر بودن هر دو فرزند

B: حادثه‌ی دختر بودن کوچکترین فرزند

C: حادثه‌ی دختر بودن حداقل یکی از فرزندان

الف) احتمال $\longleftrightarrow$ دختر بودن هر دو فرزند به شرطی که بدانیم فرزند کوچکتر دختر است، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

ب) احتمال دختر بودن هر دو فرزند به شرطی که بدانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(\text{حداقل دختر بودن یکی از فرزندان}) = 1 - (\text{هیچ کدام از فرزندان دختر نباشند})$$

$$= 1 - 1/4 = 3/4$$

بدین ترتیب ، احتمال شرطی مورد بحث را به صورت زیر محاسبه می کنیم :

$$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A)}{P(C)}$$

$$= \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

همانطور که در قسمت های الف و ب مشاهده کردید احتمال های $P(A\cap C)$ و $P(A\cap B)$ برابر $P(A)$ می باشند. حادثه ی A زیر مجموعه ی حادثه های B و C می باشد؛ بدین ترتیب اشتراک حادثه ی A با حادثه های B و C دقیقا برابر حادثه ی A خواهد شد.

16- اگر A حادثه ای آمدن حداقل یک 6 در دو پرتاب تاس ، باشد فضای نمونه ای این حادثه به صورت زیر می باشد:

$$A = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),$$
$$(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

همانطور که از فضای نمونه ی بالا مشخص است ، 11 حالت ممکن است که در پرتاب دو تاس ، حداقل یک عدد 6 مواجه شویم . با توجه به این که تعداد اعضای فضای نمونه ای کل پرتاب دو تاس برابر 36 می باشد؛ احتمال حادثه ی A برابر است با :

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

از طرف دیگر اگر حادثه ی B برابر حادثه ی متفاوت بودن وجوه تاس های پرتاب شده ، باشد $P(B)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(B) = 1 - P\left(\text{یکسان بودن وجوه تاس های پرتاب شده}\right)$$

$$= 1 - 6/36 = 5/6$$

بنابراین احتمال ظاهر شدن حداقل یک عدد 6 در پرتاب دو تاس به شرطی که وجوه تاس های پرتاب شده متفاوت باشند ، برابر است با :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

احتمال $P(A\cap B)$ یعنی احتمال حادثه ای است که حداقل یک عدد 6 در پرتاب دو تاس داشته باشیم به طوری که وجوه تاس های پرتاب شده متفاوت باشند؛ با توجه به فضای تعریف شده برای حادثه ی A ، حادثه ی $(A\cap B)$ دارای 10 عضو می باشد. پس خواهیم داشت :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{10/36}{5/6} = 1/3$$

17- اگر سه تاس پرتاب شوند، تعداد اعضای فضای نمونه کل برابر $6 \times 6 \times 6 = 216$ می‌باشد. برای حل مسأله پیش رو سه حادثه‌ی زیر را تعریف می‌کنیم:

A : حادثه‌ی آمدن اعداد مشابه در دو تاس

B : حادثه‌ی آمدن اعداد مشابه در هر سه تاس

C : حادثه‌ی آمدن اعداد متفاوت در هر سه تاس

با کمی دقت مشخص می‌شود که سه حادثه‌ی بالا دو به دو ناسازگار بوده و اجتماع آنها برابر فضای نمونه کل پرتاب سه تاس می‌شود. بنابراین $P(A)+P(B)+P(C)$ برابر یک خواهد بود. کاملا واضح است که $P(B)$ برابر $\frac{6}{216}$ می‌باشد:

$$P(B) = \frac{\text{تعداد حالاتی که هر سه تاس اعداد مشابه داشته باشند}}{\text{تعداد حالات کل فضای نمونه}}$$

$$= \frac{6}{216} = 1/36$$

احتمال رخداد حادثه‌ی C نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(C) = \frac{\text{تعداد حالاتی که هر سه تاس اعداد متفاوت داشته باشند}}{\text{تعداد حالات کل فضای نمونه}}$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} = \frac{20}{36}$$

حال می‌توان با استفاده از مقادیر بدست آمده برای $P(B)$ و $P(C)$، مقدار $P(A)$ که خواسته‌ی مسأله می‌باشد را محاسبه کرد. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$P(A)+P(B)+P(C)=1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(B) - P(C)$$

$$= 1 - 1/36 - \frac{20}{36} = \frac{5}{12}$$

18- با توجه به فرمول بیز می‌دانیم که:

$$P(H|W)=\frac{P(W|H)P(H)}{P(W|H)P(H)+P(W|H^c)P(H^c)}$$

حال اگر A را حادثه طلایی بودن موی افراد تعریف کنیم، احتمال زن بودن فرد انتخاب شده به شرط که موی این فرد طلایی باشد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(\text{Female}|A)=\frac{P(\text{Female}\cap A)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A|\text{Female})P(\text{Female})}{P(A|\text{Female})P(\text{Female})+P(A|\text{male})P(\text{Male})}$$

$$=\frac{0.25\times 0.5}{0.25\times 0.5+0.05\times 0.5}=0.83$$

19- برای حل این سوال دو حادثه زیر را تعریف می‌کنیم:

A: حادثه 7 شدن مجموع دو تاس پرتاب شده

B: حادثه 6 بودن اولین تاس پرتاب شده

حال احتمال 6 بودن اولین تاس پرتاب شده به شرط اینکه مجموع دو تاس پرتاب شده برابر 7 گردد، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد حالاتی که مجموع دو تاس برابر 7 می‌گردد}}{\text{تعداد کل حالات فضای نمونه}}$$

$$=6/36=1/6$$

$$P(\ \cap\ )=\frac{\text{تعداد حالاتی که مجموع دو تاس برابر 7 گردد در حالی که اولین تاس برابر 6 گردد}}{\text{تعداد کل حالات فضای نمونه}}=\frac{1}{36}$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=$$

$$=\frac{1/36}{1/6}=1/6$$

20- اگر A نشان دهنده حادثه سیاه بودن گوی انتخاب شده باشد و B_i بیانگر حادثه‌ای باشد که در آن جعبه i ام انتخاب شده باشد، $P(A)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)$$

با توجه به اینکه می‌دانیم $P(H\cap W)=P(H|W)P(W)$، خواهیم داشت:

$$P(A)= P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

احتمال اینکه توپ خارج شده از کیسه اول باشد مشروط بر اینکه توپ سیاه باشد به صورت زیر محاسبه می شود:

با استفاده از فرمول بیز (B_1):

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}}=\frac{3}{7}$$

21- برای حل سوال پیش رو سه حادثه ی زیر را تعریف می کنیم:

A: حادثه ی سفید بودن توپ انتقال داده شده

B: حادثه ی سیاه بودن توپ انتقال داده شده

C: حادثه ی سفید بودن توپ خارج شده از کیسه دوم

با استفاده از فرمول بیز

حال احتمال سفید بودن توپ انتقال داده شده مشروط بر اینکه توپ خارج شده از کیسه دوم سفید باشد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(A|C)=\frac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)}$$

$$=\frac{\frac{2}{7}\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{7}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{4}{21}}{\frac{5}{21}}=\frac{4}{5}$$

22- الف) A را حادثه ی انتخاب کردن سکه سالم و B حادثه ی انتخاب کردن سکه ناسالم در نظر می گیریم. احتمال سالم بودن سکه انتخاب شده مشروط بر اینکه شیر آمده باشد به صورت زیر محاسبه می شود:

با استفاده از فرمول بیز

$$P(A\mid \text{شیر آمده باشد}) = \frac{P(\text{شیر آمدن}\mid A)P(A)}{P(\text{شیر آمدن}\mid A)P(A) + P(\text{شیر آمدن}\mid B)P(B)}$$

$$= \frac{1/2 \times 1/2}{1/2 \times 1/2 + 1 \times 1/2}$$

$$= \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

ب) احتمال اینکه سکه برداشته شده سالم باشد مشروط بر اینکه دو پرتاب این سکه شیر آمده باشد
با استفاده از فرمول بیز به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$P(A\mid \text{هر دو پرتاب شیر آمده باشد}) = \frac{P(\text{شیر آمدن هر دو پرتاب}\mid A)P(A)}{P(\text{شیر آمدن هر دو پرتاب}\mid A)P(A) + P(\text{شیر آمدن هر دو پرتاب}\mid B)P(B)}$$

$$= \frac{1/2 \times 1/2 \times 1/2}{1/2 \times 1/2 \times 1/2 + 1 \times 1 \times 1/2}$$

$$= \frac{1/8}{5/8} = 1/5$$

ج) در نهایت احتمال اینکه سکه برداشته شده سالم باشد مشروط بر اینکه در هر سه پرتاب شیر آمده باشد
با استفاده از فرمول بیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(A\mid \text{هر سه پرتاب شیر آمده باشد}) = \frac{P(\text{شیر آمدن هر سه پرتاب}\mid A)P(A)}{P(\text{شیر آمدن هر سه پرتاب}\mid A)P(A) + P(\text{شیر آمدن هر سه پرتاب}\mid B)P(B)}$$

$$= \frac{1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2}{1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 + 1 \times 1 \times 1 \times 1/2}$$

$$= \frac{1/16}{\frac{9}{16}} = 1/9$$

23- برای حل این مسئله، سه حادثه‌ی A، B و C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A: حادثه‌ی پرتاب شدن سکه‌ی سالم

B: حادثه‌ی پرتاب شدن سکه‌ی ناسالم (هر دو طرف شیر)

C: حادثه‌ی پرتاب شدن سکه‌ی ناسالم (احتمال آمدن شیر برابر $\frac{3}{4}$ است)

بدین ترتیب، احتمال پرتاب شدن سکه‌ی ناسالم (هر دو طرف شیر) مشروط بر اینکه از پرتاب سکه شیر آمده باشد، با استفاده از فرمول بیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(B|\text{شیر آمده باشد}) = \frac{P(\text{شیر آمدن}|B)P(B)}{P(\text{شیر آمدن}|B)P(B)+P(\text{شیر آمدن}|A)P(A)+P(\text{شیر آمدن}|C)P(C)}$$

$$= \frac{1\times 1/3}{1\times 1/3 + 1/2\times 1/3 + 3/4\times 1/3}$$

$$= \frac{1/3}{9/12} = 4/9$$

24- اگر A حادثه‌ی سفید بودن گلوله‌ی انتخاب شده باشد، احتمال خط آمدن در پرتاب سکه مشروط بر اینکه گلوله‌ی سفید انتخاب شده باشد با استفاده از فرمول بیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(\text{خط آمدن}|A) = \frac{P(A|\text{خط آمده باشد})P(\text{خط آمدن})}{P(A|\text{خط آمده باشد})P(\text{خط آمدن})+P(A|\text{شیر آمده باشد})P(\text{شیر آمدن})}$$

$$= \frac{1/4\times 1/2}{1/4\times 1/2 + 5/12\times 1/2}$$

$$= \frac{1/8}{8/24} = 3/8$$

توجه: صورت سؤال باید تغییر داده شود و داخل کیسه‌ی دوم 2 گلوله‌ی سفید و سه گلوله‌ی سیاه ذکر گردد

25- اگر A_i حادثه‌ی سیاه بودن iامین توپ و B_i حادثه‌ی قرمز بودن iامین توپ باشد، با استفاده از فرمول بیز احتمال سیاه بودن اولین گلوله مشروط بر اینکه دومین گلوله خارج شده قرمز باشد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A_1|B_2) = \frac{P(B_2|A_1)P(A_1)}{P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|B_1)P(B_1)}$$

$$= \frac{\frac{r}{b+r+c} \times \frac{b}{b+r}}{\frac{r}{b+r+c} \times \frac{b}{b+r} + \frac{r+c}{b+r+c} \times \frac{r}{b+r}}$$

$$= \frac{r \times b}{r \times b + (r+c)r}$$

$$= \frac{r \times b}{r(b+(r+c))} = \frac{b}{b+r+c}$$

همانطور که گفته شد کیسه‌ی مورد بحث دارای b گلوله سیاه و r گلوله قرمز است؛ بدین ترتیب احتمال خارج شدن یک گلوله‌ی قرمز در اولین اقدام $(P(B_1))$ برابر $\frac{r}{r+b}$ و همچنین احتمال خارج شدن یک گلوله سیاه در اولین اقدام $(P(A_1))$ برابر $\frac{b}{r+b}$ می‌باشد. از طرف دیگر اگر بدانیم که در اقدام اول گلوله سیاه خارج شده است، احتمال خارج شدن گلوله قرمز در اقدام دوم $(P(B_2|A_1))$ برابر $\frac{r}{b+r+c}$ خواهد بود. مقادیر دیگر به کار گرفته شده، به همین عنوان محاسبه می‌شوند.

26- اگر افراد زندانی را با حروف A، B و C نشان دهیم، و همچنین پاسخ نگهبان به شخص A مبنی بر اینکه چه فردی آزاد می‌شود را X (می‌تواند برابر شخص B و یا C باشد) در نظر بگیریم، برای مثال خواهیم داشت:

$$P\{\text{شخص } A \text{ اعدام شود} \mid X=B\} = \frac{P\{\text{شخص } A \text{ اعدام شود}, X=B\}}{P\{X=B\}}$$

با استفاده از فرمول بیز خواهیم داشت:

$$= \frac{P\{\text{شخص } A \text{ اعدام شود}\} P\{X=B \mid \text{شخص } A \text{ اعدام شود}\}}{P\{X=B\}}$$

$$= \frac{1/3 \, P\{X=B \mid \text{شخص } A \text{ اعدام شود}\}}{1/2}$$

با فرض این مسئله که اگر قرار بر اعدام شخص A باشد، نگهبان با احتمال مساوی (معقول بودن) نام یکی از اشخاص B و C را به شخص A مبنی بر آزاد شدن هم‌بندانش انتخاب می‌کند؛ یعنی:

$$P\{X=B \mid \text{شخص } A \text{ اعدام شود}\} = 1/2$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که $P\{X=B\}=\frac{1}{3}$ شخص A اعدام شود} خواهد بود، به صورت مشابه

$P\{X=C$ شخص A اعدام شود$\}=\frac{1}{3}$ نیز خواهد بود.

پس استدلال نگهبان درست نمی‌باشد.

27- اگر X متغیر تصادفی باشد که نمایانگر تفاضل بین تعداد شیرها و تعداد خط‌های به دست آمده از n بار پرتاب یک سکه باشد، مقادیری که می‌تواند این متغیر بدست آورد به صورت زیر می‌باشد:

$$-n, -n+2, -n+4, \dots, n-2, n$$

به عنوان مثال در صورتی که 3 بار یک سکه را پرتاب کرده باشیم متغیر تصادفی X می‌تواند مقادیر

$\{3, 2, 1, -1, -2, -3\}$ را اختیار کند.

28- اگر در سؤال 27 سکه سالم را دو بار پرتاب کنیم متغیر تصادفی X می‌تواند مقادیر $\{2, 0, -2\}$ را اختیار نماید. احتمال رخداد مقادیر مختلف متغیر تصادفی X به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$P\{X=-2\}=P\{$خط، خط$\}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P\{X=2\}=P\{$شیر، شیر$\}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P\{X=0\}=P\{$خط، شیر$\}+P\{$شیر، خط$\}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

29- اگر یک تاس را دو بار پرتاب کنیم خواهیم داشت:

الف) فضای نمونه برای بیشترین مقداری که تاس پرتاب شده می‌تواند در دو پرتاب اختیار کند به صورت زیر می‌باشد:

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$

ب) فضای نمونه برای کم‌ترین مقداری که تاس پرتاب شده می‌تواند در دو پرتاب اختیار کند به صورت زیر می‌باشد:

$B=\{1,2,3,4,5,6\}$

ج) فضای نمونه برای حاصل جمع دو تاس پرتاب شده به صورت زیر می‌باشد:

$C=\{2,3,4,5,\dots,11,12\}$

ح) فضای نمونه برای حادثه تفریق دو تاس مرتب شده (مقدار تاس اول منهای مقدار تاس دوم) به صورت زیر خواهد بود:

$$D=\{-5,-4,\dots,0,\dots,4,5\}$$

اگر تاس اول 6 آمده باشد و تاس دوم 1 آمده باشد.

اگر تاس اول 1 آمده باشد و تاس دوم 6 آمده باشد.

30- به عنوان مثال فضای نمونه حادثه اگر بیشترین مقدار برای مرتب دو تاس برابر 6 باشد، به صورت زیر خواهد بود:

$$A_{max=6}=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

از طرف دیگر فضای نمونه حادثه اگر کمترین مقدار تعداد برای مرتب دو تاس برابر 1 باشد نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$B_{min=1}=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$$

می دانیم که فضای نمونه کل برای مرتب دو تاس دارای 36 عضو می باشد، پس خواهیم داشت:

$$P\{A_{max=6}\}=P\{B_{min=1}\}=11/36$$

بدین ترتیب برای بقیه حالت های سوال 29 خواهیم داشت:

$$P\{C_{max=5}\}=P\{D_{min=2}\}=1/4$$

$$P\{E_{max=4}\}=P\{F_{min=3}\}=7/36$$

$$P\{G_{max=3}\}=P\{H_{min=4}\}=5/36$$

$$P\{I_{max=2}\}=P\{J_{min=5}\}=1/12$$

$$P\{K_{max=1}\}=P\{L_{min=6}\}=1/36$$

حال احتمالات مرتبط با قسمت ج سوال 29 را به صورت زیر بدست می آوریم. ابتدا فضای نمونه برای حالتی که مجموع مرتب دو تاس برابر 3 و 6 گردد را به عنوان مثال مشخص می کنیم:

$M_{sum=3}=\{(1,2),(2,1)\}$ → حالتی که مجموع دو تاس مرتب شده برابر 3 گردد → این توضیحات را نمی خواد بنویسی

$N_{sum=6}=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ → حالتی که مجموع دو تاس مرتب شده برابر 6 گردد

$P\{sum=3\} = 2/36$ $\qquad$ $P\{sum=6\} = 5/36$

بدین ترتیب احتمالات مرتبط با حالت های دیگر به صورت زیر می باشد:

$P\{sum=2\} = 1/36$

$P\{sum=4\} = 3/36$

$P\{sum=5\} = 4/36$

$P\{sum=7\} = 6/36$

$P\{sum=8\} = 5/36$

$P\{sum=9\} = 4/36$

$P\{sum=10\} = 3/36$

$P\{sum=11\} = 2/36$

$P\{sum=12\} = 1/36$

اگرچه توضیحات بیشتری در ارتباط با این قسمت در سوال 11 این فصل ارائه شده است.

$\boxed{-31}$

32- در پرتاب یک سکه (3 مرتبه)، احتمال آمدن شیر یا خط به ترتیب برابر 0.7 و 0.3 می باشد. اگر X یک متغیر تصادفی باشد که تعداد شیرهای آمده را نشان دهد احتمالات مرتبط با مقادیر مختلف X به صورت زیر محاسبه می شود:

$P\{X=0\} = (0.3)^3 = 0.27$

$P\{X=1\} = 0.3\times0.3\times0.7+0.3\times0.7\times0.3+0.7\times0.3\times0.3 = 0.189$

$P\{X=2\} = 0.3\times0.7\times0.7+0.7\times0.3\times0.7+0.7\times0.7\times0.3 = 0.441$

$P\{X=3\} = (0.7)^3 = 0.343$

33- تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X براساس تابع توزیع تجمعی ارائه شده به صورت زیر می باشد:

$$\left.\begin{array}{l} P(0) = 1/2 \\ P(1) = 1 - 1/2 = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow p(b) = \begin{cases} 0 & ; \; b<0 \\ 1/2 & ; \; 0\le b<1 \\ 1/2 & ; \; 1\le b<\infty \end{cases}$$

34- تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X براساس تابع توزیع تجمعی ارائه شده به صورت زیر محاسبه می شود:

$P(0) = 1/2$ $\qquad$ $P(2) = 4/5 - 3/5 = 1/5$ $\qquad$ $P(3.5) = 1 - 9/10 = 1/10$

$P(1) = 3/5 - 1/2 = 1/10$ $\qquad$ $P(3) = 9/10 - 4/5 = 1/10$

در نتیجه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر بدست می آید:

$$f(b)=\begin{cases} 0 & ; \ b<0 \\ 1/2 & ; \ 0\leq b<1 \\ 1/10 & ; \ 1\leq b<2 \\ 1/5 & ; \ 2\leq b<3 \\ 1/10 & ; \ 3\leq b<3.5 \\ 1/10 & ; \ b\geq 3.5 \end{cases}$$

35 - احتمال اینکه در پرتاب 3 تاس حداکثر یکبار 6 ظاهر گردد متمم احتمال حالتی است که حداقل 2 بار عدد 6 از پرتاب 3 تاس ظاهر گردد. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$P(\text{آمدن حداکثر یکبار عدد 6 در پرتاب 3 تاس}) = 1 - P(\text{آمدن حداقل 2 بار عدد 6 در پرتاب 3 تاس})$$

$$= 1-\Big(\underbrace{\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)}_{\text{احتمال حالتی که دقیقاً دو بار عدد 6 ظاهر گردد در پرتاب 3 تاس}} + \underbrace{\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0}_{\text{احتمال حالتی که دقیقاً 3 بار عدد 6 ظاهر گردد در پرتاب 3 تاس}}\Big) = \frac{200}{216}$$

36 - با توجه به اینکه گلوله های خارج شده جایگذاری می گردند احتمال سفید و یا سیاه بودن گلوله ها در مراحل بعدی برابر احتمال خروج گلوله سفید و یا سیاه در مرحله اول می باشد. بدین ترتیب احتمال اینکه دقیقاً 2 گلوله ی خارج شده در چهار اقدام $\leftrightarrow$ سفید باشد به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$P(\text{سفید بودن دو گلوله خارج شده در چهار اقدام}) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{1}{16} = 3/8$$

37 - در یک امتحان تستی که هر سوال دارای سه گزینه می باشد، اگر شخصی به صورت شانسی به سوالات پاسخ دهد، با احتمال $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ به ترتیب پاسخ درست و غلط داده است. بدین منظور احتمال اینکه یک دانشجو فقط با حدس زدن به چهار سوال و یا بیشتر پاسخ صحیح دهد به صورت زیر محاسبه می شود: (در امتحانی با 5 سوال)

$$P(A) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{11}{243}$$

38 - همانطور که می‌دانیم، تابع توزیع احتمال برای یک متغیر تصادفی با پارامترهای (n,p) به صورت زیر می‌باشد

$$p(i)=\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i} \qquad i=0,1,\dots,n$$

با توجه به اینکه در صورت مسأله پیش رو $p=1/2$ و $n=6$ در نظر گرفته شده است، خواهیم داشت:

$$p(i=0)=\binom{6}{0}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{0}(1-1/2)^{6-0}=1/64$$

$$p(i=1)=\binom{6}{1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\times(1-1/2)^{6-1}=6/64$$

$$p(i=2)=\binom{6}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times(1-1/2)^{6-2}=15/64$$

$$p(i=3)=\binom{6}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\times(1-1/2)^{6-3}=20/64$$

$$p(i=4)=\binom{6}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\times(1-1/2)^{6-4}=15/64$$

$$p(i=5)=\binom{6}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\times(1-1/2)^{6-5}=6/64$$

$$p(i=6)=\binom{6}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\times(1-1/2)^{6-6}=1/64$$

از احتمال‌های بالا مشخص است که بیشترین تعداد مربوط به حالتی خواهد بود که $i=3$ باشد.

39 - با توجه به اینکه مشتری‌ها با احتمال 5 درصد به هنگام پرواز حاضر نمی‌شوند، پس با احتمال 95 درصد به هنگام پرواز حاضر می‌شوند. احتمال اینکه در هنگام پرواز حداقل یک صندلی خالی باشد برابر با احتمال حالتی است که حداقل 3 نفر از مشتری‌هایی که بلیط رزرو کرده‌اند حاضر نشوند. به عبارت دیگر این احتمال برابر متمم حالتی است که همه 52 مشتری یا 51 مشتری از میان 52 مشتری و یا 50 مشتری از میان 52 مشتری به هنگام پرواز حاضر شوند. پس احتمال اینکه حداقل یک صندلی به هنگام پرواز خالی بماند به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(\text{خالی ماندن حداقل یک صندلی به هنگام پرواز})=1-(0.95)^{52}-\binom{52}{1}(0.95)^{51}(0.05)-\binom{52}{2}(0.95)^{50}(0.05)^{2}$$

40 - همانطور که می‌دانیم تعداد حالت‌های n آزمایش که در x_1 تای آن نتیجه 1، x_2 تای آن نتیجه 2، ... و x_r تای آن نتیجه r حاصل شود به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\frac{n!}{x_1!\,x_2!\cdots x_r!}$$

احتمال آنکه نتیجه ۱ دقیقا x_1 بار، نتیجه 2 دقیقا x_2 بار، ... و نتیجه r دقیقا x_r بار حاصل شود به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\frac{n!}{X_1!\,X_2!\cdots X_r!}P_1^{X_1}P_2^{X_2}\cdots P_r^{X_r} \quad ; \quad X_1+X_2+\cdots+X_r=n$$

41- در توزیع دوجمله ای که در سوال قبل توزیع احتمالش معرفی شد اگر $r=2$ باشد (اگر آزمایش های صورت گرفته دارای دو نتیجه باشند) خواهیم داشت:

$$\frac{n!}{X_1!\,.\,X_2!}P_1^{X_1}P_2^{X_2}$$

با توجه به اینکه در این حالت خاص تنها دو ... برای n آزمایش صورت گرفته ممکن خواهد بود پس می دانیم که:

$$X_1+X_2=n \implies X_2=n-X_1$$

$$P_1+P_2=1 \implies P_2=1-P_1$$

$$X_2!=(\underbrace{X_1+X_2}_{n}-X_1)!=(n-X_1)!$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{n!}{X_1!\,(n-X_1)!}P_1^{X_1}(1-P_1)^{n-X_1}=\binom{n}{X_1}P_1^{X_1}(1-P_1)^{n-X_1}$$

که این توزیع احتمال معادل توزیع احتمال متغیر تصادفی دوجمله ای می باشد.

42- با توجه به نتیجه به دست آمده از سوال 41 که در توزیع دوجمله ای اگر $r=2$ باشد (یعنی تنها دو حالت وجود داشته باشد) معادل توزیع احتمال دوجمله ای می باشد. بدین ترتیب احتمال حادثه ای که $X_1+X_2+\cdots+X_k$ اتفاق بیفتد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{X_1+X_2+\cdots+X_k=m\}=\binom{n}{m}(P_1+P_2+\cdots+P_k)^m(P_{k+1}+P_{k+2}+\cdots+P_r)^{n-m}$$

در این سوال با توجه به اینکه هدف یافتن احتمال حادثه ی $X_1+X_2+\cdots+X_k$ می باشد، پس می توان نتیجه ی به دست آمده از r آزمایش را به دو دسته تقسیم کرد. اگر نتیجه ی آزمایش های صورت گرفته جزئی از نتایج 1 تا k باشند، می توان آن را به دسته ی اول تخصیص داد؛ اما اگر نتیجه ی آزمایش های صورت گرفته جزئی از نتایج k+1 تا r باشند، می توان آن را به دسته ی دوم تخصیص داد. به عبارت دیگر دسته ی دوم معرف حالتی است که نتیجه ی آزمایش صورت گرفته عضوی از دسته ی اول نباشد. بنابراین با توجه به اینکه در این حالت دو دسته یا دو نتیجه ی ممکن وجود دارد، پس برای محاسبه ی احتمال تعداد نتایج

توزیع احتمال بینم استفاده شده است.

43- اگر A را حادثه‌ی وارد شدن 5 مشتری به مغازه و به فروش رفتن 2 تلویزیون رنگی و یک تلویزیون سیاه سفید تعریف کنیم، احتمال رخداد حادثه‌ی A به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p(A) = \frac{5!}{2!1!2!}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0.054$$

44- ⟵ B حادثه‌ی وارد شدن 5 مشتری و به فروش رفتن حداقل 3 تلویزیون در مجموع تعریف شده. برای محاسبه‌ی احتمال حادثه‌ی B می‌توان احتمال حادثه‌ی متمم آن را محاسبه کرد؛ متمم حادثه‌ی B حالتی است که فروشگاه با ورود 5 مشتری حداکثر 2 تلویزیون به فروش برساند. اگر فروشگاه 2 تلویزیون رنگی، یا 2 تلویزیون سیاه سفید، یا 1 تلویزیون رنگی و 1 تلویزیون سیاه سفید، یا یک تلویزیون رنگی، یا یک تلویزیون سیاه سفید، یا هیچ تلویزیونی را با ورود پنج مشتری به فروش برساند حادثه‌ی B' رخ می‌دهد.

$$p(B') = \frac{5!}{3!2!0!}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^0 + \frac{5!}{3!0!2!}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{5!}{3!1!1!}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^1$$

$$+ \frac{5!}{4!1!0!}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{3}{10}\right)^0 + \frac{5!}{4!0!1!}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{3}{10}\right)^1 + \frac{5!}{5!0!0!}\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{3}{10}\right)^0$$

بدین ترتیب احتمال رخداد حادثه‌ی B برابر خواهد بود با:

$$P(B) = 1 - p(B')$$

- راه حل دوم: با توجه به این که هر مشتری با احتمال 50 درصد تلویزیون سیاه سفید و با احتمال 30 درصد تلویزیون رنگی خریداری می‌کند، پس هر مشتری با احتمال 80 درصد یک تلویزیون خریداری خواهد کرد. بدین ترتیب احتمال رخداد حادثه‌ی B برابر خواهد بود با:

$$P(B) = 1 - \frac{5!}{5!0!}\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^0 - \frac{5!}{4!1!}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^1 - \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

45- احتمال این که در پرتاب یک سکه اولین شیر در پنجمین پرتاب ظاهر شود (در حالتی رخ می‌دهد که در چهار پرتاب اول خط بیاید) بنابراین این احتمال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(\text{ظاهر شدن اولین شیر در پنجمین پرتاب سکه}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{32}$$

46- الف)

$$P\{X=2\} = \binom{8}{2}(0.1)^2(0.9)^6 = 0.148$$

اما اگر بخواهیم احتمال بالا را با استفاده از حالت تقریبی توزیع پواسون محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\lambda = np = 8 \times 0.1 = 0.8$$

$$P\{X=2\} = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-0.8} \times \frac{(0.8)^2}{2!} = 0.143$$

ب)

$$P\{X=9\} = \binom{10}{9} \times (0.95)^9 \times (0.05)^1 = 0.315$$

$$\lambda = 9.5 \Rightarrow P\{X=9\} = e^{-9.5} \times \frac{(9.5)^9}{9!} = 0.130$$

ج)

$$P\{X=0\} = \binom{10}{0} \times (0.1)^0 \times (0.9)^{10} = 0.348$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow P\{X=0\} = e^{-1} \times \frac{(1)^0}{0!} = 0.367$$

د)

$$P\{X=4\} = \binom{9}{4} (0.2)^4 \times (0.8)^5 = 0.066$$

$$\lambda = 1.8 \Rightarrow P\{X=4\} = e^{-1.8} \times \frac{(1.8)^4}{4!} = 0.072$$

از محاسبه احتمال های بالا نتیجه می شود که در مقادیر بزرگ n و کوچک p ، توزیع احتمال که متغیر تصادفی بینم را تقریب می زند معادل توزیع احتمال پواسن می باشد.

47- الف) برای محاسبه ثابت c خواهیم داشت:

$$P\{X \in (-\infty, +\infty)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c(1-x^2)\,dx$$

با توجه به اینکه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X تنها در بازه ی (1و-1) مقدار می گیرد خواهیم داشت:

$$= c\int_{-1}^{+1} (1-x^2)\,dx$$

$$= c\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{4}{3}c$$

همانطور که می دانیم، برای تمام متغیرهای تصادفی پیوسته مقدار $P\{X \in (-\infty, +\infty)\}$ برابر 1 خواهد بود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{4}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

ب) تابع توزیع تجمعی متغیر X نیز به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{y} \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{y}$$

$$= \frac{3}{4}\left(y - \frac{y^3}{3} + \frac{2}{3}\right), \qquad -1 < X < 1$$

48- الف) مقدار ثابت C به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{X \in (-\infty, +\infty)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C(4x - 2x^2)$$

با توجه به اینکه تابع چگالی احتمالی موجود فقط در بازه $(0,2)$ مقدار غیر صفر دارد، پس خواهیم داشت:

$$= C\int_{0}^{2} (4x - 2x^2)\,dx$$

$$= C\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_{0}^{2} = \frac{8}{3}C$$

همانطور که می دانیم، برای هر متغیر تصادفی X مقدار $P\{X \in (-\infty, +\infty)\}$ برابر 1 خواهد بود؛ پس خواهیم داشت:

$$\frac{8}{3}C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{8}$$

ب)

$$P\left\{\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\} = \int_{1/2}^{3/2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{1/2}^{3/2} \frac{3}{8}(4x - 2x^2)\,dx$$

$$= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_{1/3}^{2/3} = \frac{11}{16}$$

49- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به صورت زیر محاسبه می شود:

$$F(y) = \int_{10}^{y} f(x)\,dx$$

$$= \int_{10}^{y} 10/x^2 \, dx$$

$$= \left[-\frac{10}{x}\right]_{10}^{y} = \left(1 - \frac{10}{y}\right)$$

هم چنین مقدار $P\{X>20\}$ نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{X>20\} = \int_{20}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{20}^{+\infty} \frac{10}{x^2}\, dx$$

$$= \left[-\frac{10}{x}\right]_{20}^{+\infty}$$

$$= \left(\frac{-10}{+\infty} - \left(-\frac{10}{20}\right)\right) = 1/2$$

50- با توجه به اینکه $F(a) = P(X \leq a)$ می باشد خواهیم داشت:

$$F(x) = P\{M \leq x\}$$

همانطور که در صورت سوال مفروض است $M = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ پس خواهیم داشت:

$$= P\{\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq x\}$$

$$= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq x\}$$

$$= x^n$$

از طرف دیگر می دانیم که $\frac{d}{da} F(a) = f(a)$ بنابراین خواهیم داشت:

$$f_M(x) = \frac{d}{dx} P\{M \leq x\}$$

$$= (x^n)' = n x^{n-1}$$

51- مقدار ثابت C برای تابع چگالی احتمال X به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{X \in (-\infty, +\infty)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-2x} \, dx$$

با توجه به این که تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X فقط در بازه‌ی $(0, +\infty)$ تعریف می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$= C \int_{0}^{+\infty} e^{-2x} \, dx$$

$$= C \left[-\tfrac{1}{2} e^{-2x} \right] \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= C \left(0 - \left(-\tfrac{1}{2} \right) \right) = \tfrac{1}{2} C$$

همان طور که می‌دانیم برای تمامی متغیرهای تصادفی X که $P\{X \in (-\infty, +\infty)\}$ برابر 1 خواهد بود، بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\tfrac{1}{2} C = 1 \implies C = 2$$

مقدار $P\{X > 2\}$ نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{X > 2\} = 2 \int_{2}^{+\infty} f(x) \, dx$$

$$= 2 \int_{2}^{+\infty} e^{-2x} \, dx$$

$$= 2 \left[-\tfrac{1}{2} e^{-2x} \right] \Big|_{2}^{+\infty}$$

$$= 2 \left(0 - \left(-\tfrac{1}{2} e^{-4} \right) \right) = 0.018$$

52 - امید ریاضی متغیر تصادفی X (متغیر تصادفی منفصل) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(X) = \sum x \cdot P(x)$$

$$= 1 \times P(1) + 2 \times P(2) + 24 \times P(24)$$

$$= 1 \times \tfrac{1}{2} + 2 \times \tfrac{1}{3} + 24 \times \tfrac{1}{6} = \tfrac{31}{6}$$

53- فرض کنید $Y=X^2$ است، در این حالت برای محاسبه $E[X^2]$ ابتدا بایستی تابع چگالی احتمالی Y را محاسبه کنیم؛ برای $0<a<1$ خواهیم داشت:

$$F_Y(a)=P\{Y\leq a\}$$
$$=P\{X^2\leq a\}$$
$$=P\{X\leq a^{1/2}\}$$
$$=a^{1/2}$$

همانطور که می‌دانیم $f_Y(a)=\frac{d}{da}F_Y(a)$ است؛ پس خواهیم داشت:

$$f_Y(a)=(a^{1/2})'=\frac{1}{2}a^{-1/2}$$

بدین ترتیب، $E[X^2]$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$E[X^2]=\int_0^1 x f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 a\left(\frac{1}{2}a^{-1/2}\right)da$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 a^{3/2}\,da$$
$$=\left[\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}a^{3/2}\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times(1)^{3/2}-0\right)=\frac{1}{5}$$

54-

$$E[X^2]\geq(E[X])^2 \implies E[X^2]-(E[X])^2\geq 0$$

با توجه به اینکه $Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2$ است، نامعادله‌ی بالا فقط در شرایطی تبدیل به یک تساوی می‌گردد که X مقدار ثابتی را اختیار کند؛ دلیل این امر صفر بودن مقدار واریانس برای اعداد ثابت می‌باشد.

55- با فرض اینکه c یک ثابت می‌باشد، موارد خواسته شده به صورت زیر اثبات می‌شوند:

الف)

$$Var(cX)=E[(cX-E[cX])^2]$$
$$=E[c^2(X-E[X])^2]$$

$$= c^2 E[(X-E[X])^2] = c\,Var(X)$$

 ب)

$$Var(c+X) = E[(c+X-E[c+X])^2]$$

$$= E[(X-E[X])^2] = Var(X)$$

56 – اگر $N=\sum_{i=1}^{r} X_i$ بین تعداد شکستهای ترتیب شده بین $(i-1)$ امین و i امین شیر ظاهر شده باشد:

با توجه به این که X_i یک متغیر تصادفی هندسی با متوسط $1/p$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$E[N] = \sum_{i=1}^{r} E[X_i] = r/p$$

[redacted]

57 – همانطور که می‌دانیم تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی برنولی به صورت زیر می‌باشد:

$$p(0) = 1-p$$

$$p(1) = p$$

از طرف دیگر می‌دانیم که امید ریاضی متغیر تصادفی برنولی برابر p می‌باشد:

$$E[X] = 0\times(1-p) + 1\times p = p$$

بدین ترتیب، واریانس این متغیر تصادفی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Var(X) = E[(X-E[X])^2]$$

$$= E[(X-p)^2]$$

$$= E[(X^2-2Xp+p^2)]$$

$$= E[X^2] - 2pE[X] + p^2$$

با توجه به این که $E[X^n] = \sum x^n P(x)$ است، پس خواهیم داشت:

$$= (0)^2(1-p) + (1)^2(p) - 2p\times p + p^2 = 0$$

58 – الف) همانطور که در سؤال 50 اشاره شد، تابع توزیع احتمال آن برابر $f(x) = nx^{n-1}$ است، پس خواهیم داشت:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} x(nx^{n-1})\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+} x^n \, dx$$

$$= \left[\frac{n x^{n+1}}{n+1} \right] \Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$= \left(\frac{n \times (1)^{n+1}}{n+1} - \frac{n \times (-1)^{n+1}}{n+1} \right)$$

اگر n+1 زوج باشد مقدار بالا صفر می شود؟ اما درصورتیکه n+1 فرد باشد مقدار بالا $\frac{2n}{n+1}$ می شود به این ترتیب امید ریاضی عدد صفر یا برابر میانگین این دو مقدار می باشد:

$$E[X] = \left(0 + \frac{2n}{n+1}\right) / 2 = \frac{n}{n+1}$$

پ) امید ریاضی تابع توزیع احتمال ارائه شده در سؤال 47 به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} x \left(\frac{3}{4} (1 - x^2) \right) dx$$

$$= \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} (x - x^3) \, dx$$

$$= \left[3/4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \right] \Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$= 3/4 \left((1/2 - 1/4) - (1/2 - 1/4) \right) = 0$$

ج) در نهایت امید ریاضی تابع توزیع احتمال ارائه شده در سؤال 48 نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx$$

$$= 3/8 \int_{-1}^{+1} x\,(4x - 2x^2)\,dx$$

$$= 3/8 \int_{-1}^{+1} (4x^2 - 2x^3)\,dx$$

$$= \left[3/8 \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{2} \right) \right] \Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$= 3/8 \left(\left(\frac{4}{3} - 1/2 \right) - \left(-4/3 - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= 3/8 \left(5/6 + 11/6 \right)$$

$$= 3/8 \left(\frac{16}{6} \right) = 1$$

59- مقدار $E[X^n]$ برای متغیر تصادفی X که دارای توزیع یکنواخت بین (0,1) می باشد به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx$$

همانطور که می دانیم تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی یکنواخت به صورت زیر می باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-a} & ; a < X < B \\ 0 & ; \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$E[X^n] = \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1-0} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right] \Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{(1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(0)^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1}$$

مقدار $Var(X^n)$ نیز برای یک متغیر تصادفی که دارای توزیع یکنواخت بین (0,1) باشد به صورت زیر بدست می آید

$$Var(X^n) = E[(X^n)^2] - \left(E[X^n]\right)^2$$

$$= E[X^{2n}] - (E[X^n])^2$$

از قسمت قبل می دانیم که $E[X^n] = \frac{1}{n+1}$ است، از طرف دیگر مقدار $E[X^{2n}]$ با قرار دادن $2n$ به جای n در مقدار $E[X^n]$ بدست آمده پس خواهیم داشت:

$$= \frac{1}{(2n)+1} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$$

60- می دانیم تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی بینم با پارامترهای n و P به صورت زیر می باشد:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

بدین ترتیب مقدار $E[X^2]$ به صورت زیر بدست می آید:

$$E[X^2] = \sum_{X=0}^{n} x^2 p^x (1-p)^{n-x}$$

اگر x^2 را معادل $X(X-1)+X$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$E[X^2] = \sum_{X=0}^{n} X(X-1) \frac{n!}{(n-x)!\, x!} p^x (1-p)^{n-x} + \sum_{X=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{X=2}^{n} \frac{n!}{(n-x)!\,(x-2)!} p^x (1-p)^{n-x} + E[X]$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{X=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2} (1-p)^{n-x} + E[X]$$

$$= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} + E[X] = n(n-1)p^2 + E[X]$$

$$\Downarrow$$

قبلا داشتیم که $E[X] = np$ است، پس خواهیم داشت:

$$Var(x) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= n(n-1)p^2 + E[X] - (E[X])^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

61 - متغیر تصادفی X که دارای توزیع بینم است، تعداد n آزمایش مستقل می‌شود که در نتیجه هر کدام با احتمال P موفقیت با احتمال (1-P) عدم موفقیت می‌باشد. بدین ترتیب اگر X و Y دو متغیر تصادفی بینم مستقل از یکدیگر باشند که به ترتیب هر کدام دارای پارامترهای (n,P) و (m,P) هستند، با توجه به تعریف توزیع بینم (مستقل بودن آزمایش‌ها) می‌توان حاصل جمع دو متغیر مستقل X+Y که دربرگیرنده n+m آزمایش مستقل می‌باشد را یک متغیر تصادفی با توزیع بینم که دارای پارامتر (n+m , P) می‌باشد در نظر گرفت.

62 - اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و پیوسته باشند، با استفاده از تعریف کانولوشن خواهیم داشت:

$$P\{X\leq Y\} = P\{X-Y\leq 0\}$$

$$= \iint_{X-Y\leq 0} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0+y} f_X(x) f_Y(x)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{y} f_X(x)\, dx\right) f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(y) f_Y(y)\, dy$$

63 - تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی یکنواخت در فاصله (0,1) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^1 t e^{tx}\left(\frac{1}{1-0}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{t}\left(e^{tx}\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$\frac{d}{dt} E\left[e^{tx}\right] = \frac{te^{t} - e^{t} + 1}{t^{2}}$$

$$\frac{d^{2}}{dt^{2}} E\left[e^{tx}\right] = \frac{t^{2}e^{t} - 2(te^{t} - e^{t} + 1)}{t^{3}}$$

ادامه‌ی این سؤال صفحه‌ی بعد

64 - اگر x یک متغیر تصادفی منفصل باشد و مقادیر 1، 2 و 3 را با احتمال $\frac{1}{3}$ اختیار کند تابع مولد ممان این متغیر تصادفی به صورت زیر محاسبه می‌شود؟

$$E\left[e^{tx}\right] = \sum_{x_i} e^{tx_i} P(x_i)$$

$$= e^{(t\times1)} \times 1/3 + e^{(t\times2)} \times 1/3 + e^{(t\times3)} \times 1/3$$

$$= 1/3(e^{t} + e^{2t} + e^{3t})$$

حال مقادیر $E[X]$ و $E[X^2]$ و $E[X^3]$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt} E\left[e^{tx}\right] = 1/3\,(e^{t} + 2e^{2t} + 3e^{3t})$$

$$\frac{d^{2}}{dt^{2}} E\left[e^{tx}\right] = 1/3\,(e^{t} + 4e^{2t} + 9e^{3t})$$

$$\frac{d^{3}}{dt^{3}} E\left[e^{tx}\right] = 1/3\,(e^{t} + 8e^{2t} + 27e^{3t})$$

$$E[X] = \frac{d}{dt} E\left[e^{tx}\right]\Big|_{t=0}$$

$$= 1/3(e^{0} + 2e^{2\times0} + 3e^{3\times0}) = 2$$

$$E[X^2] = \frac{d^{2}}{dt^{2}} E\left[e^{tx}\right]\Big|_{t=0}$$

$$= 1/3(e^{0} + 4e^{2\times0} + 9e^{3\times0}) = \frac{14}{3}$$

$$E[X^3] = \frac{d^{3}}{dt^{3}} E\left[e^{tx}\right]\Big|_{t=0}$$

$$= 1/3(e^{0} + 8e^{2\times0} + 27e^{3t}) = 12$$

مقادیر $E[X]$ و $E[X^2]$ نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$E[X] = \frac{d}{dt} E[e^{tx}]\Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{te^t + e^t - e^t}{2t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{te^t}{2t} = 1/2$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2} E[e^{tx}]\Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2te^t + t^2e^t - 2te^t - 2e^t + 2e^t}{3t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 e^t}{3t^2} = 1/3$$

پس $Var(x)$ برابر خواهد بود با:

$$Var(x) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= 1/3 - (1/2)^2 = 1/12$$

6.5- تابع مولد ممان متغیر تصادفی X به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{tx} \left(\frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{4t} \int_0^{+\infty} -t x\, e^{-\frac{x^2 t}{2}}\, dx$$

$$= \left[-1/4t\, e^{-\frac{x^2 t}{2}}\right]\Bigg|_0^{+\infty} = 1/4t$$

حال امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{d}{dt}E[e^{tx}] = -\frac{1}{4t^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}E[e^{tx}] = \frac{1}{2t^3}$$

$$E[X] = \frac{d}{dt}E[e^{tx}]\Big|_{t=0} = -\infty$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}E[e^{tx}]\Big|_{t=0} = +\infty$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = +\infty$$

[redacted]

66- همانطور که می‌دانیم اگر متغیر تصادفی هندسی بیانگر احتمال اولین موفقیت در x امین مرحله باشد، تابع توزیع احتمال آن به صورت $f(x) = (1-p)^{x-1}p$ است. بدین ترتیب تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی که یک متغیر منفصل نیز می‌باشد به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\Phi(t) = E[e^{tx}]$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt}(1-p)^{x-1}p$$

$$= pe^t \sum_{x=1}^{\infty} \left((1-p)e^t\right)^{x-1}$$

می‌دانیم که برای هر $a<1$، $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ است، پس خواهیم داشت:

$$= pe^t \times \left(\frac{1}{1-(1-p)e^t}\right)$$

67- به منظور اثبات برابر بودن توزیع مجموع چند متغیر تصادفی نمایی یکسان با توزیع گاما، ابتدا تابع مولد گشتاور توزیع نمایی را محاسبه می‌کنیم:

$$\Phi(t) = E[e^{tx}]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}$$

$$= \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-(\lambda - t)x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

با توجه به این که تابع مولد گشتاور مجموع چند متغیر تصادفی برابر حاصلضرب توابع مولد گشتاور تک تک آنها در یکدیگر می باشد پس تابع مولد گشتاور مجموع n متغیر نمایی با توزیع های مشابه به صورت زیر می باشد:

$$\Phi_{nX}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{n}$$

از طرف دیگر می دانیم که تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی با توزیع گاما و پارامترهای (n, λ) برابر است با:

$$\Phi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{n}$$

بنابراین به دلیل این که تابع مولد گشتاور مجموع چندین متغیر تصادفی نمایی با توزیع یکسان دقیقا برابر تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی گاما می باشد می توان ادعا کرد که مجموع چندین متغیر تصادفی نمایی با توزیع های یکسان دارای توزیع گاما می باشد.

68- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد به ازای هر مقدار $k>0$ خواهیم داشت:

$$P\{|X-\mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

با استفاده از نامساوی چبیشف که در بالا مطرح شده قانون اعداد بزرگ به صورت زیر به اثبات می رسد:

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n - n\mu}{n}\right| > \varepsilon\right\}$$

$$= P\{|X_1+X_2+\cdots+X_n - n\mu| > n\varepsilon\}$$

$$\leq \underbrace{\mathrm{Var}\{X_1+X_2+\cdots+X_n\}}_{\sigma^2} / \underbrace{n^2\varepsilon^2}_{k^2}$$

از طرف دیگر واریانس n متغیر تصادفی با توزیع مشابه برابر $n\sigma^2$ است، پس خواهیم داشت:

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right\} \leq n\sigma^2 / n^2\varepsilon^2$$

کاملاً بدیهی است که اگر n به سمت بی‌نهایت میل بکند، عبارت مورد نظر نیز به سمت صفر میل می‌کند.

69- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین 10 و واریانس 15 باشد، با توجه به نامساوی چبیشف خواهیم داشت:

$$P\{X>k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$\Rightarrow P\{X>5\} \leq \frac{15}{(5)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\overset{!}{\Rightarrow} P\{X<15\} = 1 - P\{X>15\}$$

$$= 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$P\{5<X<15\} = P\{X<15\} - P\{X<5\}$$

$$= \frac{14}{15} - 3/5 = 2/5$$

70- اگر X متغیر تصادفی‌ای شده فقط مقادیر غیرمنفی را اتخاذ کند، برای هر مقدار $a>0$ براساس نامساوی مارکوف خواهیم داشت:

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

بدین ترتیب برای متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ... و X_{10} که از توزیع پواسون با میانگین 1 پیروی کنند، خواهیم داشت:

الف)

$$P\{X_1+X_2+\cdots+X_{10} \geq 15\} \leq \frac{E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_{10}]}{15}$$

$$\leq \frac{1+1+\cdots+1}{15} = 2/3$$

ب) با توجه به اینکه مقدار نامساوی مارکوف برای $P\{X_1+X_2+\cdots+X_{10} \geq 15\}$ برابر $2/3$ است، می‌توان واریانس این توزیع را با استفاده از قضیه‌ی حدی با استفاده از نامساوی چبیشف به صورت زیر محاسبه کرد:

$$P\{X_1+X_2+\cdots+X_{10} \geq 15\} \leq 2/3 = \frac{10}{15} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sigma}$$

$$= \frac{(X_1+X_2+\cdots+X_{10}) - (E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_{10}])}{\sigma}$$

$$= \frac{(X_1+X_2+\cdots+X_{10}) - 10}{\sqrt{10}}$$

که مقدار $P\{X_1+X_2+\cdots+X_{10}>15\}$ با استفاده از قضیه حدی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{X_1+X_2+\cdots+X_{10}\}\approx P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i}{\sqrt{10}}>\frac{15-10}{\sqrt{10}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi\left[\frac{5}{\sqrt{10}}\right]$$

71- اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین 1 و واریانس 4 باشد، $P\{2<X<3\}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{2<X<3\}=P\left\{\frac{2-1}{\sqrt{4}}<\frac{X-1}{\sqrt{4}}<\frac{3-1}{\sqrt{4}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{1}{2}<\frac{X-1}{2}<1\right\}$$

$$=P\left\{\frac{1}{2}<Z<1\right\}$$

$$=\Phi(1)-\Phi(1/2)=0.1498$$

$\boxed{-72}$

73- الف) اگر X نمایانگر تعداد توپ‌های سفید انتخاب شده از میان K توپ باشد، بنابراین K−i نمایانگر تعداد توپ‌های سیاه انتخاب شده می‌باشد. بدین ترتیب احتمال سفید بودن i تا توپ از میان K توپ انتخابی در صورتیکه n توپ سفید و m توپ سیاه وجود داشته باشد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(X=i)=\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}\Big/\binom{n+m}{k}\qquad \forall\ i=0,1,\ldots,\min(k,n)$$

ب) اگر X_i نمایانگر این باشد که i امین توپ انتخاب شده (از میان K توپ) سفید است ($X_i=1$)، امید ریاضی متغیر تصادفی X به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$X=\sum_{i=1}^{K}X_i \Rightarrow E[X]=\sum_{i=1}^{K}E[X_i]$$

$$=\frac{Kn}{n+m}$$

توجه: با توجه به اینکه i امین توپ انتخاب شده می‌تواند از n+m توپ موجود باشد، پس خواهیم داشت:

$$E[X_i]=P\{X_i=1\}=\frac{n}{n+m}$$

۷۱- اگر $Y_j = 1$ نمایانگر این باشد که j امین توپ سفید انتخاب شده است، امید ریاضی متغیر تصادفی X به صورت زیر بیان می‌شود:

$$X = \sum_{j=1}^{n} Y_j \quad \Rightarrow \quad E[X] = \sum_{j=1}^{n} E[Y_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P\{\text{j امین توپ سفید انتخاب بود}\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{K}{n+m} = \frac{nK}{n+m}$$

-74 برای اثبات این سوال کافیست تا از تعریف واریانس استفاده کنیم. بدین منظور با بسط تعریف واریانس خواهیم داشت:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left[\left((X_1+X_2+\cdots+X_n) - E[X_1+X_2+\cdots+X_n]\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left((X_1+X_2+\cdots+X_n) - E[X_1] - E[X_2] - \cdots - E[X_n]\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left((X_1 - E[X_1]) + (X_2 - E[X_2]) + \cdots + (X_n - E[X_n])\right)^2\right]$$

$$= E\left[(X_1 - E[X_1])^2 + (X_2 - E[X_2])^2 + \cdots + 2(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])\right.$$

$$\left. + 2(X_1 - E[X_1])(X_3 - E[X_3]) + \cdots + 2(X_{n-1} - E[X_{n-1}])(X_n - E[X_n])\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

نداند

دیگر 2 توپ سیاه باقیمانده شانس برای انتخاب شدن

الف)

-75 اگر بدانیم که 3 توپ از 6 توپ خارج شده سیاه هستند (یعنی $Y=3$ است)، تابع توزیع احتمال شرطی X (تعداد توپ‌های سفید خارج شده) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P\{X=i \mid Y=3\} = P\{\text{i توپ سفید انتخاب شود در حالی که 3 توپ سفید و 6 توپ قرمز وجود داشته باشد}\}$$

$$= \frac{\binom{3}{i}\binom{6}{3-i}}{\binom{9}{3}}, \quad \forall i = 0, 1, 2, 3$$

ب) اگر از 6 توپ انتخاب شده تنها 1 توپ سیاه باشد ($Y=1$)، 5 توپ انتخاب شده دیگر می‌بایست از بین 3 توپ سفید و 6 توپ قرمز انتخاب شده باشند. بدین ترتیب، احتمال انتخاب توپ سفید در 5 انتخاب باقیمانده

برای بر ۳ می باشد؛ امید ریاضی شرطی متغیر تصادفی X که بیانگر تعداد توپ های سفید انتخاب شده می باشد به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$E[X|Y=1] = 5 \times 3/9 = 5/3$$

76- در سؤال قبلی اگر توپ های انتخاب شده جایگذاری شوند، مقادیر خواسته شده به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$P_{X|Y}(0|3) = P\{X=0, Y=3\} / P\{Y=3\}$$

$$= P\{\text{0 توپ سفید، 3 توپ آبی و 3 توپ قرمز}\}$$

$$= \frac{6!}{0! \times 3! \times 3!} \left(\frac{3}{14}\right)^0 \left(\frac{5}{14}\right)^3 \left(\frac{6}{14}\right)^3 \Big/ \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{5}{14}\right)^3 \left(\frac{9}{14}\right)^3 = 8/27$$

همچون بالا، مقادیر $P_{X|Y}(1|3)$، $P_{X|Y}(2|3)$ و $P_{X|Y}(3,3)$ نیز محاسبه می شوند.

$$P_{X|Y}(1|3) = 4/9 \qquad P_{X|Y}(2|3) = 2/9 \qquad P_{X|Y}(3|3) = 1/27$$

همچنین امید ریاضی شرطی متغیر تصادفی X نیز به صورت زیر برای این حالت محاسبه می شود:

$$E[X|Y=1] = 0 \times P_{X|Y}(0|1) + 1 \times P_{X|Y}(1|1) + 2 \times P_{X|Y}(2|1) + 3 \times P_{X|Y}(3|1) + 4 \times P_{X|Y}(4|1) + 5 \times P_{X|Y}(5|1) = 5/3$$

77- با توجه به اطلاعات ارائه شده در صورت سؤال مقادیر $E[X^3|Y=1]$ و $E[X^2|Y=2, Z=1]$ به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$E[X^3|Y=1] = \sum_x x^3 P(X|Y=1)$$

$$= (1)^3 P(X=1|Y=1) + (2)^3 P(X=2|Y=1)$$

$$= (1)^3 \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} + (2^3) \frac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)}$$

$$= 1 \times \frac{1/8 + 1/8}{1/8 + 1/8 + 1/4 + 3/16} + 8 \times \frac{1/4 + 3/16}{1/8 + 1/8 + 1/4 + 3/16} = 5.45$$

$$E[X^2|Y=2, Z=1] = \sum_x x^2 P(X|Y=2, Z=1)$$

$$= (1)^2 P(X=1|Y=2, Z=1) + (2)^2 P(X=2|Y=2, Z=1)$$

$$= (1)^2 \frac{P(X=1, Y=2, Z=1)}{P(Y=2, Z=1)} + (2)^2 \frac{P(X=2, Y=2, Z=1)}{P(Y=2, Z=1)}$$

$$= 1\times\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+0}+4\times\frac{0}{\frac{1}{16}+0}=1$$

78- اگر X و Y به ترتیب نمایانگر تعداد پرتاب های انجام گرفته تا رسیدن به عدد 6 و 5 باشند، مقادیر خواسته شده در صورت سوال به صورت زیر محاسبه می شوند:

الف)

$$E[X]=\frac{1}{6}E[X\mid \text{در اولین پرتاب عدد 6 ظاهر گردد}]+\frac{5}{6}E[X\mid \text{در پرتاب اول عدد 6 ظاهر نگردد}]$$

می دانیم که $E[X\mid \text{در پرتاب اول عدد 6 ظاهر نگردد}]$ برابر $1+E[X]$ است؛ با توجه به تعریف متغیر تصادفی X، $E[X\mid \text{در اولین پرتاب عدد 6 ظاهر گردد}]=1$ خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$E[X]=\frac{1}{6}\times 1+\frac{5}{6}(1+E[X]) \Rightarrow \frac{1}{6}E[X]=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}$$

$$E[X]=6$$

ب) اگر همواره در اولین پرتاب عدد 5 ظاهر گردد (یعنی $Y=1$)، پس برای دستیابی به اولین عدد 6 در پرتاب ها، یک سری پرتاب از طریق مشابه نسبت به حالت الف نیاز داریم.

$$E[X\mid Y=1]=E[X]+1=7$$

ج) اگر بدانیم که همواره اولین عدد 5 در پنجمین پرتاب ظاهر می گردد (یعنی $Y=5$)، احتمال دستیابی به اولین عدد 6 قبل و بعد از پنجمین پرتاب به ترتیب برابر $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{6}$ می باشد. بنابراین $E[X\mid Y=5]$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E[X\mid Y=5]=1\left(\frac{1}{5}\right)+2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)+3\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$+\underbrace{6\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)}+7\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\cdots$$

اگر در 6 بار پرتاب، 4 بار اول عددی غیر از 6، در پرتاب پنجم عدد پنج و در پرتاب ششم عدد 6 ظاهر گردد.

79- اگر X و Y هر دو متغیرهای تصادفی گسسته باشند، خواهیم داشت:

$$E[X\mid Y=y]=\sum_x xP(X=x\mid Y=y)$$

با توجه به اینکه X و Y از یکدیگر مستقلند، می توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

$$=\sum_x xP(X=x)$$

عبارت بالا دقیقا معادل $E[X]$ برای یک متغیر تصادفی متصل می باشد.

80- با توجه به تابع چگالی احتمال توام X و Y، $E[X|Y=y]$ را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y) dx$$

با توجه به این که متغیر تصادفی X تنها در بازه $[-y,y]$ مقدار می گیرد، خواهیم داشت:

$$=\int_{-y}^{y} x\left(\frac{e^{-y}}{8}(y^2-x^2)\right)dx$$

$$=\frac{e^{-y}}{8}\int_{-y}^{y} x(y^2-x^2)\,dx$$

$$=\frac{e^{-y}}{8}\left[\frac{x^2}{2}y^2-\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_{-y}^{y}$$

$$=\frac{e^{-y}}{8}\left(\frac{y^4}{2}-\frac{y^4}{4}-\left(+\frac{y^4}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\right)=0$$

81- با توجه به تابع چگالی احتمال X, Y داده شده در صورت سوال، برای محاسبه $E[X|Y=y]$ ابتدا مقدار $P_{X|Y}(X|Y=y)$ را بدست می آوریم:

$$f_{X|Y}(X|Y=y)=\frac{P(X,Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$=\frac{\frac{e^{-y}}{y}\times e^{-x/y}}{e^{-y}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{y}e^{-x/y}dx}$$

از طرفی می دانیم که $e^{-y}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{y}e^{-x/y}dx=-e^{-y}\left[e^{-x/y}\right]\Big|_{0}^{+\infty}=e^{-y}$ است؛ پس خواهیم داشت:

$$=\frac{\frac{e^{-y}}{y}\times e^{-x/y}}{e^{-y}}=\frac{1}{y}e^{-x/y}$$

با توجه به تعریف توزیع نمایی می توان نتیجه گیری کرد که متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با میانگین y می باشد؛ پس امید ریاضی این متغیر تصادفی هنگامی که $Y=y$ باشد برابر خواهد بود با:

$$E[X|Y=y]=y$$

82 - برای محاسبه امید ریاضی شرطی متغیر X، ابتدا تابع چگالی احتمال شرطی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{X|X>1}(x) = \frac{f(x)}{P\{X>1\}} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda}}$$

حال به صورت زیر مقدار $E[X|X>1]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$E[X|X>1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|X>1}\, dx$$

با توجه به اینکه متغیر X تنها در بازه $(0,+\infty)$ مقدار می‌گیرد، خواهیم داشت:

$$= e^{\lambda}\int_{1}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1+1/\lambda$$

83 - برای محاسبه امید ریاضی شرطی متغیر تصادفی X ابتدا باید تابع چگالی احتمال شرطی آن را محاسبه کنیم:

$$f_{X|X<1/2}(x) = \frac{f(x)}{P\{X<1/2\}} =$$

$$= \frac{1}{1/2} = 2$$

نتیجتاً خواهیم داشت:

$$E[X|X<1/2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|X<1/2}\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} 2\, dx = 2$$

84 - برای محاسبه امید ریاضی شرطی خواسته شده، ابتدا باید تابع چگالی احتمال شرطی آن را محاسبه کنیم:

$$f_{X|Y}(X|Y=y) = \frac{P(X, Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$= \frac{1/y\; e^{-y}}{\int_{0}^{y} 1/y\; e^{-y}\, dx}$$

$$= \frac{1/y\; e^{-y}}{y \times 1/y \times e^{-y}} = 1/y$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$E[X^2|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X|Y}(X, Y=y)\, dx$$

←

با توجه به این که متغیر تصادفی X فقط در بازه‌ی $(0,y)$ تعریف گردیده خواهیم داشت:

$$= \frac{1}{y}\int_0^y x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{y}\frac{x^3}{3}\right]_0^y$$

$$= \left(\frac{y^2}{3} - 0\right) = \frac{y^2}{3}$$

85- برای اثبات این رابطه برای دو متغیر تصادفی پیوسته‌ی X و Y، از سمت راست معادله شروع می‌کنیم تا به سمت چپ معادله برسیم که بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E[X|Y=y]\, f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx\, f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = E[X]$$

86- اگر X و Y متغیرهای تصادفی باشند که به ترتیب بیانگر در انتخاب شده و تعداد روزهای سپری شده در زندان باشند، خواهیم داشت:

الف) امید ریاضی تعداد روزهای سپری شده در زندان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[N] = \sum_{i=1}^{3} E[N|X=i]\,P(X=i)$$

$$= E[N|X=1]P(X=1) + E[N|X=2]P(X=2) + E[N|X=3]P(X=3)$$

به عنوان مثال اگر شخص در 1 را انتخاب کند، وی 2 روز دیگر را در زندان سپری کرده و دوباره به جای اول باز می‌گردد. بدین ترتیب $E[N|X=1]$ برابر $E[N]+2$ می‌شود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$E[N] = (E[N]+2)\times 0.5 + (E[N]+3)\times 0.3 + (0)\times 0.2$$

$$= 0.5E[N] + 1 + 0.3E[N] + 0.9$$

$$\Longrightarrow E[N] = 9.5$$

ب) اگر متغیر تصادفی N_i بیانگر تعداد روزهای اضافه‌ای باشد که آن شخص پس از انتخاب درب iام می‌بایست سپری کند، $E[N]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[N] = \sum_{i=1}^{3} E[N_i \mid X=i]\, P(X=i)$$

$$= E[N_1 \mid X=1]\, P(X=1) + E[N_2 \mid X=2]\, P(X=2) + E[N_3 \mid X=3]\, P(X=3)$$

$$= (E[N_1]+2) \times 0.5 + (E[N_2]+3) \times 0.3 + (0) \times 0.2$$

با توجه به این که شخص در انتخاب ~~...~~ به احتمال‌های برابر یکی از دو درب دیگر را انتخاب می‌کند، مقادیر $E[N_1]$ و $E[N_2]$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$E[N_1] = \tfrac{1}{2}(3) + \tfrac{1}{2}(0) = \tfrac{3}{2}$$

$$E[N_2] = \tfrac{1}{2}(2) + \tfrac{1}{2}(0) = 1$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$E[N] = (\tfrac{3}{2}+2) \times 0.5 + (1+3) \times 0.3$$

$$= 2.95$$

ج) برای محاسبه واریانس مشابه قسمت الف و ب بایست مقدار $E[X^2]-(E[X])^2$ را محاسبه کنیم. پس برای قسمت الف خواهیم داشت:

$$E[N^2] = E[N^2 \mid X=1]P(X=1) + E[N^2 \mid X=2]P(X=2) + E[N^2 \mid X=3]\, P(X=3)$$

حال باید مقادیر $E[N^2 \mid X=i]$ محاسبه شوند. به عنوان مثال $E[N^2 \mid X=1]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[N^2 \mid X=1] = (2+E[N])^2$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$E[N^2] = (2+E[N])^2 \times 0.5 + (3+E[N])^2 \times 0.3 + (0)^2 \times 0.2$$

$$= (4+4E[N]+(E[N])^2) \times 0.5 + (9+6E[N]+(E[N])^2) \times 0.3$$

با توجه به این که $E[N]$ در قسمت الف معادل 9.5 است، خواهیم داشت:

$$E[N^2] = 113$$

$$\Rightarrow Var(N) = E[N^2] - (E[N])^2$$

$$= 113 - (9.5)^2 = 22.75$$

واریانس قسمت ب این سوال نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[N^2] = E[N_1^2|X=1]\,P(X=1) + E[N_2^2|X=2]\,P(X=2) + E[N_3^2|X=3]\,P(X=3)$$

حال باید مقادیر $E[N_i^2|X=i]$ محاسبه شوند؛ به عنوان مثال $E[N_1^2|X=1]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[N_1^2|X=1] = (2+E[N_1])^2$$

$$= (2+3/2)^2 =$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$E[N^2] = (12.25)\times 0.5 + (16 \longleftrightarrow)\times 0.3 + (0)\times 0.2$$

$$= 10.925$$

[redacted]

$$\Rightarrow Var(N) = E[N^2] - (E[N])^2$$

$$= 10.925 - (2.95)^2 = 2.22$$

87- اگر متغیر تصادفی X نشانگر زمانی باشد که این موش در تونل‌های حفرشده توسط خودش محبوس شده است، L و R به ترتیب نشان‌دهنده انتخاب کردن مسیر سمت چپ و راست باشند، متوسط زمانی که این موش در تونل‌های حفرشده محبوس می‌ماند به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$E[X] = \frac{1}{2}E[X|L] + \frac{1}{2}E[X|R]$$

به عنوان مثال اگر این موش مسیر سمت چپ را انتخاب کند، با احتمال $1/3$ از تونل‌های حفرشده پس از 2 دقیقه خارج می‌شود و با احتمال $2/3$، پس از 5 دقیقه به مکان اول باز می‌گردد. بدین ترتیب $E[X|L]$ برابر $\frac{1}{3}(2)+\frac{2}{3}(E[X])$ خواهد بود؛ پس خواهیم داشت:

$$E[X] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(2) + \frac{2}{3}(E[X])\right) + \frac{1}{2}(3+E[X])$$

$$\Rightarrow E[X] = 10.76$$

از طرف دیگر برای محاسبه واریانس می‌بایست مقدار $E[X^2]$ را محاسبه کنیم. این مقدار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[X^2] = \frac{1}{2}E[X^2|L] + \frac{1}{2}E[X^2|R]$$

مقادیر $E[X^2|L]$, $E[X^2|R]$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$E[X^2|L] = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}E[X]\right)^2$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9}E[X]^2 + \frac{8}{9}E[X] \xrightarrow{E[X]=10.76} E[X^2|L] = 61.46$$

$$E[X^2|R] = (3+E[X])^2$$

$$= 9 + E[X]^2 + 6E[X] \xrightarrow{E[X]=10.76} E[X^2|R] = 189.33$$

پس خواهیم داشت:

$$E[X^2] = \frac{1}{2}(61.46) + \frac{1}{2}(189.33) = 125.39$$

$$\Rightarrow Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= 125.39 - (10.76)^2 = 9.61$$

88- اگر تعداد حواله های دریافتی (μ_2) مستقل از مقدار پول دریافتی به ازای هر حواله باشد (متوسط μ_1)، میانگین پول دریافتی در طول یک هفته معادل حاصلضرب میانگین تعداد دریافتی در متوسط دریافتی می باشد:

میانگین پول دریافتی در طول یک هفته $= \mu_1 \times \mu_2$

از طرف دیگر واریانس دریافتی در طول یک هفته نیز با استفاده از رابطه ارائه شده در سؤال 91 در رابطه با واریانس شرطی به صورت زیر محاسبه می شود:

واریانس پول دریافتی در طول یک هفته $= \mu_1 \times \sigma_2^2 + \mu_2^2 \times \sigma_1^2$

[redacted]

89- میانگین درآمد این مغازه از ضرب تعداد مشتری هایی که در یک روز وارد مغازه می شوند و متوسط پولی که در آنجا خرج می کنند بدست می آید. پس خواهیم داشت:

میانگین درآمد مغازه = (متوسط تعداد مشتری هایی که وارد می شوند) × (متوسط مبلغی که هر مشتری خرج می کند)

$$= \lambda \times \frac{100+0}{2}$$

$$= 10 \times 50 = 500$$

با استفاده از رابطه ارائه شده در سؤال 91 واریانس این مقدار نیز به صورت زیر بدست می آید:

واریانس درآمد مغازه = (متوسط تعداد مشتری هایی که وارد می شوند)(واریانس پولی که هر مشتری خرج می کند) + $($متوسط پولی که هر مشتری خرج می کند$)^2$ (واریانس تعداد مشتری هایی که وارد می شوند)

$$= 10 \times \frac{(100)^2}{12} + (50)^2 \times 10 = 33,333$$

[redacted]

۹۰- خاصیت مهم امید ریاضی شرطی آن است که برای هر دو متغیرهای تصادفی X و Y داشته باشیم:

$$E[E[X|Y]] = E[X] \Longrightarrow E[E[X^2|Y]] = E[X^2]$$

بدین ترتیب عبارت $E[Var(X|Y)]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
E[Var(X|Y)] &= E\left[E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2\right] \\
&= E[E[X^2|Y]] - E[(E[X|Y])^2] \\
&= E[X^2] - E[(E[X|Y])^2] \\
&\cancel{= E[X^2] - 2E[X]E[E[X|Y]] + (E[E[X|Y]])^2} \\
&\cancel{= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2} \\
&\cancel{= E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2}
\end{aligned}$$

هم چنین برای عبارت $Var(E[X|Y])$ نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
Var(E[X|Y]) &= E[(E[X|Y])^2] - (E[E[X|Y]])^2 \\
&= (E[E[X|Y]])^2 - (E[X])^2
\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$E[Var(X|Y)] + Var(E[X|Y]) = E[X^2] - (E[X])^2 = Var(X)$$

۹۱- اگر $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
Var(S|N=n) &= Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right) \\
&= Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)
\end{aligned}$$

با توجه به این که واریانس هر کدام از X_i ها برابر σ^2 می‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$Var(S|N=n) = n\sigma^2$$

از طرف دیگر برای $E[S|N=n]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
E[S|N=n] &= E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]
\end{aligned}$$

با توجه به این که میانگین هر کدام از X_i ها برابر μ می باشد، خواهیم داشت:

$$E[S \mid N=n] = n\mu$$

از فرمول واریانس شرطی ارائه شده در سؤال 90 می توان رابطه زیر را نوشت:

$$\text{Var}(S) = E[n\sigma^2] + \text{Var}(n\mu)$$
$$= \sigma^2 E[n] + \mu^2 \text{Var}(n)$$

از طرفی می دانیم که n برابر N، σ^2 برابر $\text{Var}(X)$ و μ برابر $E[X]$ است، پس خواهیم داشت:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\text{Var}(X) + (E[X])^2 + \text{Var}(N)$$

$\boxed{-92}$

93 - الف) احتمال این که در این 10 پرتاب هیچ شیری ظاهر نشود به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$P(N=0) = \frac{1}{3}\left(\binom{10}{0}(0.3)^0(0.7)^{10-0} + \binom{10}{0}(0.5)^0(0.5)^{10-0} + \binom{10}{0}(0.7)^0(0.3)^{10-0}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left((0.7)^{10} + (0.5)^{10} + (0.3)^{10}\right) = 0.0097$$

ب) احتمال این که در 10 پرتاب n شیر ظاهر گردد به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$P(N=n) = \frac{1}{3}\left(\binom{10}{n}(0.3)^n(0.7)^{10-n} + \binom{10}{n}(0.5)^n(0.5)^{10-n} + \binom{10}{n}(0.7)^n(0.3)^{10-n}\right)$$

ج) با توجه به تعریف توزیع بینم کاملا بدیهی است که متغیر تصادفی N از توزیع بینم پیروی نمی کند.

د) در کیسه اول که با احتمال 0.3 در هر پرتاب سکه شیر ظاهر می گردد، در 10 پرتاب صورت گرفته به طور متوسط 3 بار شیر و 7 بار خط ظاهر می گردد. به همین ترتیب برای کیسه های دیگر نیز به ترتیب 5 بار شیر و 5 بار خط و 7 بار شیر و 3 بار خط ظاهر می گردد. ~~...~~ اگر به ازای هر شیر ظاهر شود 1 تومان ببرد، خواهیم داشت:

متوسط پولی که در این بازی برنده می شویم $= \frac{1}{3}(3\times1) + \frac{1}{3}(5\times1) + \frac{1}{3}(7\times1) = 5$

متوسط پولی که در این بازی می بازیم $= \frac{1}{3}(7\times1) + \frac{1}{3}(5\times1) + \frac{1}{3}(3\times1) = 5$

بدین ترتیب، شرکت در این بازی منجر به سود و زیان نمی‌شود. پس شرکت کردن و یا نکردن در آن فرقی نمی‌کند.

۹۴- با توجه به این در حالت مورد نظر پس از پرتاب سکه انتخاب شده دوباره جایگذاری نمی‌گردد می‌توان نتیجه گرفت که برخلاف حالت مفروض در سؤال 93، متغیر تصادفی N در این حالت از توزیع هندسی پیروی نمی‌کند.

$\boxed{-95}$

96- اگر X متغیر تصادفی پواسون با میانگین λ باشد، خواهیم داشت:

$$P\{X=n\}=\int_0^{+\infty}P\{X=n|\lambda\}e^{-\lambda}d\lambda$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\,d\lambda$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-2\lambda}\lambda^n\frac{d\lambda}{n!}$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^n\frac{dt}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

همچنین می‌دانیم $\int_0^{+\infty}e^{-t}t^n dt=\Gamma(n+1)=n!$ پس خواهیم داشت:

$$P\{X=n\}=n!\times\frac{1}{n!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

97- اگر N متغیر تصادفی باشد که نمایانگر تعداد پرتاب‌های صورت گرفته تا ظاهر شدن اولین شیر باشد، $P\{N=k\}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{N=k\}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{10-n}{10}\right)^{k-1}\frac{n}{10}\times\frac{1}{10}$$

از نتایج توزیع احتمال محاسبه شده در بالا کاملاً مشخص است که متغیر تصادفی N از توزیع هندسی پیروی نمی‌کند ⟺ متغیر تصادفی N زمانی دارای توزیع هندسی خواهد بود که ⟺ پس از پرتاب سکه دوباره انتخاب نشود.

98- $E[XY|Y=y]=E[X|Y=y]E[Y|Y=y]=yE[X|Y=y]$

$$E[XY] = E[E[XY|Y]]$$
$$= E[E[X|Y]Y]$$

می نیم کم

99- فرض کنید عمل از خارج کردن توپ های سفید و مشکی از کیسه‌ای حاوی آنها عکس گرفته شود، اگر آزمایش معکوس را انجام بدهیم و عکس های گرفته شده را به ترتیب عکس نگاه بکنیم (یعنی آخرین عکس گرفته شده را اول ببینیم)، مجموعه‌ای از توپ های سفید و مشکی را در تصاویر مشاهده می کنیم که در حال افزایش هستند. حال اگر $P_{n,m}$ را برای رویداد (حالت گفته شده) برابر احتمال بیشتر بودن تعداد توپ های سفید در کیسه، شرط ← با شرط گذاری بر روی آخرین مرحله، کدام رنگ افزایش پیدا کرده است، خواهیم داشت:

$$P_{n,m} = P\{\text{توپ سفید همیشه بیشتر بوده} \mid \text{آخرین مرحله تعداد توپ سفید افزایش پیدا کرده باشد}\} \times \left(\frac{n}{n+m}\right)$$

$$+P\{\text{توپ سفید همیشه بیشتر باشد} \mid \text{آخرین مرحله تعداد توپ سیاه افزایش پیدا کرده باشد}\} \times \left(\frac{m}{n+m}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{n+m}\right) \underbrace{P_{n-1,m}}_{\text{حالت اول}} + \left(\frac{m}{n+m}\right) \underbrace{P_{n,m-1}}_{\text{حالت دوم}}$$

احتمال افزایش تعداد توپ های سفید در حالت اول برابر $\frac{(n-1)-m}{(n-1)+m}$ است. صورت این کسر بیانگر تعداد توپ های و مخرج آن بیانگر کل توپ های موجود در کیسه می باشد؛ این امر برای حالت دوم نیز به همین روش بدست می آید. $P_{n,m}$ به صورت زیر تبدیل می شود:

$$P_{n,m} = \left(\frac{n}{n+m}\right) \frac{(n-1)-m}{(n-1)+m} + \left(\frac{m}{n+m}\right) \frac{n-(m-1)}{n+(m-1)}$$

$$= \frac{n-m}{n+m}$$

100- با در نظر گرفتن آزمایش مطرح شده برای این مسئله در سوال 99 (رویه ی معکوس) که احتمال این است که تعداد توپ های سفید از تعداد توپ های سیاه در مرحله ی اصلی در کیسه همواره بیشتر خواهد بوده

- مدل های احتمالی: به مدل هایی که کمیت های موجود در شرایط قطعی و قابل پیش بینی نباشند، مدل های احتمالی می گویند.
- فضای نمونه: مجموعه‌ی کامل نتایج آزمایش «یعنی کلیه حالاتی که ممکن است اتفاق بیفتد» را فضای نمونه می نامند که آن را با حرف S به نمایش در می آورند.
- حادثه: هر زیر فضای موجود در فضای نمونه را یک حادثه می نامند.
- $E \cup F$: حادثه‌ای شامل همه‌ی نقاطی است که یا در E و یا در F و یا در هر دوی آنها باشد. به عبارت دیگر این حادثه زمانی رخ می دهد که حادثه‌ی E یا F رخ بدهد. ← حادثه اجتماع
- $E \cap F$: حادثه‌ای شامل همه‌ی نقاطی که هم در E و هم در F باشند. به عبارت دیگر این حادثه زمانی رخ می دهد که حادثه E و F هم زمان رخ بدهند. ← اشتراک [EF]
- حادثه خنثی: حادثه‌ای که دارای هیچ عضوی نباشد را حادثه‌ی خنثی می نامیم. این حادثه را با نماد $\emptyset$ نشان می دهیم.
- حادثه دو به دو ناسازگار: به دو حادثه که اشتراکشان برابر مجموعه $\emptyset$ می باشد، حوادث دو به دو ناسازگار می گویند.
- حادثه‌ی مکمل: مکمل یک حادثه را با نماد A^c نشان می دهیم. به طور مثال خواهیم داشت:

$S^c = \emptyset$

- اگر مجموعه‌های دو به دو ناسازگار باشند، اجتماع آنها به صورت زیر خواهد شد: $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$
- اگر چندین مجموعه داشته باشیم، اشتراک آنها به صورت روبرو خواهد بود: $\bigcap_{n=1}^{k} E_n$
- احتمالات تعریف شده روی حوادث: برای هر حادثه E از این فضای نمونه یک عدد P تعریف می گردد که سه شرط زیر را ارضا می نماید:

I) $0 \leq P(E) \leq 1$

II) $P(S) = 1$

III) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum P(E_n)$; دو به دو ناسازگارند $E_1, E_2, \ldots$

- نکته: اگر یک آزمایش n بار تکرار گردد و تعداد مواردی که حادثه‌ی E اتفاق افتد را با N(E) نمایش دهیم، احتمال حادثه E به صورت زیر تعریف می گردد:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{N(E)}{n}$$

بدین ترتیب، اگر تجربه‌ای به صورت مداوم و پشت سر هم تکرار گردد نسبت دفعاتی که حادثه‌ی E اتفاق می افتد برابر احتمال حادثه‌ی E هم باشد.

- تعریف: نظر به اینکه حوادث E و E^c دو به دو ناسازگارند، هم چنین $E^c \cup E = S$ می باشد، خواهیم داشت:

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c) \Longrightarrow P(E^c) = 1 - P(E)$$

- $P(E\cup F)$: برابر احتمال این است که تمام نقاط E و F را در بر بگیرد؛ بدین ترتیب، خواهیم داشت:

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

$$P(E_1\cup E_2\cup\dots\cup E_n)=\sum_i P(E_i)-\sum_{i<j}P(E_i\cap E_j)+\sum_{i<j<k}P(E_i\cap E_k\cap E_j)-\dots$$

$$+(-1)^{n+1}P(E_1\cap E_2\cap\dots\cap E_n)$$

- احتمال شرطی: اگر حادثه‌ی F اتفاق افتاده باشد و بخواهد E نیز رخ بدهد، لازم است که حادثه‌ی احتمالی که در هر دو حادثه‌ی E و F باشد، یعنی باید در $E\cap F$ باشد. حال که می‌دانیم F اتفاق افتاده است مجموعه‌ی F فضای نمونه جدید ما خواهد بود و در نتیجه در این حالت احتمال آن که حادثه‌ی $E\cap F$ اتفاق بیفتد برابر نسبت احتمال حادثه‌ی $E\cap F$ تقسیم بر احتمال حادثه‌ی F خواهد بود. لذا داریم:

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

- حوادث مستقل: حوادث E و F مستقل نامیده می‌شوند، اگر:

$$P(E\cap F)=P(E).P(F)$$

حال اگر E و F مستقل فرض شوند، احتمال شرطی آن‌ها بصورت زیر خواهد بود:

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{P(E)\cancel{P(F)}}{\cancel{P(F)}}=P(E)$$

$$P(F|E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}=\frac{P(F)P(E)}{P(E)}=P(F)$$

این بدان معنی است که اتفاق افتادن حادثه‌ی E هیچ تاثیری در اتفاق افتادن F دیگری ندارد. به همین دلیل است که این حوادث «مستقل» نامیده می‌شوند؛ حوادثی که مستقل نیستند «وابسته» نامیده.

- تعریف: حوادث $E_1, E_2, \dots, E_n$ مستقل نامیده می‌شوند اگر برای هر زیرمجموعه‌ی $E_1', E_2', \dots, E_r'$ از این حوادث ($r\le n$) داشته باشیم:

$$P(E_1'\cap E_2'\cap\dots\cap E_r')=P(E_1)P(E_2)\dots P(E_r)$$

- قضیه: اگر E و F مستقل باشند، در نتیجه E و F^c نیز مستقل خواهند بود.

$$P(E\cap F^c)=P(E)P(F^c)$$

- تعریف: فرض کنید که یک سری آزمایشات پشت سر هم انجام می‌گیرد و نتیجه این آزمایشات یا موفقیت و یا عدم موفقیت خواهد بود. اگر E_i ها یک حادثه را باشد که در آن i امین آزمایش به موفقیت مواجه گردد و اگر برای تمام $i_1, i_2, \dots, i_n$ داشته باشیم:

$$P(E_{i_1},E_{i_2},\dots,E_{i_n})=\prod_{i=1}^{n}P(E_{ij})$$

- فرمول بیز: اگر E و F دو حادثه باشند، احتمال رخداد حادثه‌ی E به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$P(E)=P(E|F)P(F)+P(E|F^c)(1-P(F))$$

فرمول بالا بیان می‌دارد که حادثه‌ی E یک میانگین وزنی از احتمالات شرطی E به هنگامی که F اتفاق افتاده باشد و E به هنگامی که F اتفاق نیفتاده باشد است که به هر احتمال شرطی به اندازه‌ی احتمال اتفاق افتادن شرط آن وزن داده شده است.

با استفاده از فرمول بالا می‌توان نتیجه‌ی زیر را نیز گرفت:

$$P(H|W)=\frac{P(H\cap W)}{P(W)}$$

$$=\frac{P(W|H)P(H)}{P(W)}$$

$$=\frac{P(W|H)P(H)}{P(W|H)P(H)+P(W|H^c)P(H^c)}$$

- قضیه: اگر F_i حوادثی دو به دو ناسازگار باشند به طوری که داشته باشیم $\bigcup_{1}^{n} F_i=S$، خواهیم داشت:

$$E=\bigcup_{n=1}^{n}(E\cap F_i)$$

با توجه به اینکه حوادث $E\cap F_i$ ها دو به دو ناسازگار خواهند بود، خواهیم داشت:

$$P(E)=\sum_{i=1}^{n}P(E\cap F_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(E|F_i)P(F_i)$$

از روابط بالا خواهیم داشت:

$$P(F_j|E)=\frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(E|F_i)P(F_i)}$$

- متغیر تصادفی: توابعی که در فضای نمونه تعریف می‌گردند را «متغیر تصادفی» می‌نامند. چون مقادیر متغیرهای تصادفی با استفاده از خروجی آزمایشات مشخص می‌گردند، می‌بایست مقادیر احتمالات مناسب برای هر کدام از مقادیر ممکن را برای آن‌ها بدست آورد.

- تابع توزیع تجمعی: تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X برای هر مقدار حقیقی b که $-\infty<b<\infty$ باشد به صورت روبرو تعریف می‌گردد:

$$F(b)=P(X\leq b)$$

خواص تابع توزیع تجمعی عبارتند از:

I) تابع $F(b)$ غیرنزولی (صعودی) از b می‌باشد.

II) $\lim_{b\to\infty}F(b)=F(\infty)=1$

III) $\lim_{b\to-\infty}F(b)=F(-\infty)=0$

هم چنین خواهیم داشت:

$$P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a) \quad ; \quad a<b$$

نکته: برای بدست آوردن احتمال کوچکتر بودن متغیر تصادفی X از b، بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$P\{X<b\} = \lim_{h\to 0^+} P\{X \le b-h\} = \lim_{h\to 0^+} F(b-h)$$

- متغیرهای تصادفی منفصل: برای متغیر تصادفی منفصل X، تابع توزیع احتمال $P(a)$ بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$P(a) = P(X=a)$$

اگر X یکی از مقادیر X_1، X_2، ... را اختیار نماید، خواهیم داشت:

I) $P(x_i) > 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots$

II) $P(x) = 0 \quad :$ برای تمامی مقادیر دیگر X

III) $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$

IV) $F(a) = \sum_{\text{all } x_i \le a} P(x_i)$

در ادامه چند نمونه از متغیرهای تصادفی منفصل شناخته شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

1) متغیر تصادفی برنولی: فرض کنید نتیجه یک آزمایش یا «موفقیت» و یا «عدم موفقیت» باشد. اگر به ترتیب مقادیر 0 و 1 را برای عدم موفقیت و موفقیت در نظر بگیریم، تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی برنولی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(0) = P(X=0) = 1-P$$

$$P(1) = P(X=1) = P$$

* لازم به ذکر است که $0 \le P \le 1$ است.

2) متغیر تصادفی بینم: حال اگر n آزمایش مستقل که نتیجه هر کدام موفقیت یا عدم موفقیت باشد، با متغیر تصادفی بینم روبرو خواهیم شد. اگر X نمایشگر تعداد موفقیت‌های رخ داده شده در این n آزمایش باشد، آنگاه X متغیر تصادفی بینم با پارامترهای (n,P) خواهد بود. تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی بینم با پارامترهای (n,P) بصورت زیر می‌باشد.

$$P(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad i=0,1,2,\dots,n$$

- قضیه: اگر X متغیر تصادفی بینم با پارامترهای (n,P) باشد و هم چنین $(n+1)P \longleftrightarrow$ عدد صحیح باشد، خواهیم داشت:

$$x<(n+1)P \rightarrow P\{X=x-1\} < P\{X=x\}$$

$$x=(n+1)P \rightarrow P\{X=x-1\} = P\{X=x\}$$

$$x>(n+1)P \rightarrow P\{X=x-1\} > P\{X=x\}$$

3) متغیر تصادفی هندسی: تجربه های مستقل از یکدیگر را که هرکدام دارای احتمال موفقیت P بوده و تا زمان رسیدن به اولین موفقیت ادامه می یابد را در نظر بگیرید. اگر X برابر تعداد تجارب انجام گرفته تا زمان رسیدن به اولین موفقیت در نظر گرفته شود به آن متغیر تصادفی هندسی با پارامتر P گفته می شود که تابع توزیع احتمال آن به صورت زیر می باشد:

$$P(n) = P\{X=n\} = (1-P)^{n-1}P$$

4) متغیر تصادفی پوآسون: متغیر تصادفی X که یکی از مقادیر ... ,2 ,1 ,0 را اختیار می نماید، متغیر تصادفی پوآسون با پارامتر λ خوانده می شود اگر برای $\lambda>0$ داشته باشیم:

$$P(i) = P\{X=i\} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{i}}{i!}$$

نکته: در مقادیر بسیار بزرگ n و کوچک P، متغیر تصادفی بینم تقریبا برابر متغیر تصادفی پوآسون خواهد شد.

5) متغیر تصادفی بینم منفی: تصور کنید که آزمایشات مستقل از هم هرکدام با احتمال موفقیت P تا تعدادی ادامه می یابد تا اینکه r موفقیت حاصل شود. اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد کل آزمایشاتی باشد که باید صورت بپذیرد تا r موفقیت حاصل شود، X را یک متغیر تصادفی بینم منفی تعریف خواهیم کرد. تابع توزیع احتمال آن به صورت زیر خواهد بود:

$$P\{X=n\} = \binom{n-1}{r-1}P^{r}(1-P)^{n-r} \quad ; n=r,\ r+1,\ r+2,\dots$$

نکته: توجه داشته باشید که متغیر تصادفی هندسی حالتی از متغیر تصادفی بینم منفی با پارامترهای $(1,P)$ است.

6) متغیر تصادفی فوق هندسی: تصور کنید که یک نمونه n تایی بصورت تصادفی از یک ظرف شامل N توپ که (Np) تا از آن سفید و $(N-Np)$ تا از آن سیاه است بیرون کشیده می شود. اگر X نمایانگر تعداد گلوله های سفید بیرون کشیده شده از ظرف باشد، X یک متغیر تصادفی فوق هندسی با پارامترهای n ، N ، P خواهد بود که تابع توزیع احتمال آن به صورت زیر است:

$$P\{X=k\} = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{N-K}}{\binom{N}{n}} \quad ; k=0,1,2,\dots,\min(n,Np)$$

- متغیر تصادفی زتا (یا Zipf): متغیر تصادفی X متغیر تصادفی زتا نامیده می شود اگر تابع توزیع احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$P\{X=k\} = C/k^{\alpha+1} \quad ; k=1,2,\dots,\quad \alpha>0$$

$$C = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha+1}\right\}^{-1}$$

- متغیرهای تصادفی پیوسته: در این فصل به تشریح متغیرهای تصادفی می‌پردازیم که مجموعه مقادیر ممکن آنها غیر قابل شمارش باشد. متغیر تصادفی X پیوسته نامیده می‌شود اگر یک تابع غیر منفی $f(x)$ برای تمامی مقادیر حقیقی $x \in (-\infty, +\infty)$ تعریف گردد به طوری که برای هر مجموعه B از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,dx$$

تابع $f(x)$ را تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X می‌نامند. از خواص آن می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

$$\text{I)}\ P\{X \in (-\infty, +\infty)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{II)}\ P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\text{II)}\ P\{X = a\} = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \rightarrow$$ یعنی احتمال برابر شدن یک متغیر تصادفی پیوسته با یک مقدار صفر است

- نکته: ارتباط میان تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F(a) = P\{X \in (-\infty, a]\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{da}F(a) = f(a)$$

در ادامه تعدادی از متغیرهای تصادفی پیوسته را تشریح خواهیم کرد:

1) متغیر تصادفی یکنواخت: متغیر تصادفی دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ گفته می‌شود اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بدین ترتیب برای هر $0 < a < b < 1$ خواهیم داشت:

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)\,dx = b - a$$

به عبارت دیگر احتمال آنکه X در یک فاصله مخصوص بین صفر و ۱ باشد، برابر طول آن فاصله خواهد بود.

در حالت کلی اگر X یک متغیر تصادفی یکنواخت در فاصله (α, β) باشد، تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - \beta} & ; \ \alpha < x < \beta \\ 0 & ; \ \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

2) متغیر تصادفی نمایی: متغیر تصادفی پیوسته‌ای که تابع چگالی احتمال آن برای مقدار مشخص $\lambda > 0$ به صورت زیر باشد، متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ نامیده می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \ x \geq 0 \\ 0 & ; \ x < 0 \end{cases}$$

تابع توزیع تجمعی آن به این صورت خواهد بود:

$$F(a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda a} = 1-e^{-\lambda a} \qquad a\geq 0$$

3) متغیر تصادفی گاما: متغیر تصادفی پیوسته‌ای که تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\dfrac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} & ; x\geq 0\\ 0 & ; x<0\end{cases}$$

به ازای مقادیر $\lambda>0$ و عدد صحیح $n>0$ باشد، متغیر تصادفی گاما با پارامترهای n و λ نامیده می‌شود.

4) متغیر تصادفی وایبول: متغیر تصادفی پیوسته‌ای که تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر باشد، متغیر تصادفی وایبول با پارامتر ν، α و β نامیده می‌شود:

$$F(x)=\begin{cases}0 & ; x\leq\nu\\ 1-e^{\left(-\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}} & ; x>\nu\end{cases}$$

که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; x\leq\nu\\ \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(\dfrac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(-\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}} & ; x>\nu\end{cases}$$

5) متغیر تصادفی کوشی: متغیر تصادفی کوشی با پارامتر θ $(-\infty<\theta<\infty)$ متغیر تصادفی پیوسته‌ای است که دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{[1+(x-\theta)^2]} \quad ; -\infty<x<\infty$$

6) متغیر تصادفی بتا: متغیری است که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(a,b)}x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1} & ; 0<x<1\\ 0 & ; \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که در آن:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

7) متغیر تصادفی t: متغیر تصادفی t با n درجه آزادی متغیری است که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(\pi/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad ; -\infty<x<+\infty$$

8) متغیر تصادفی F: متغیر تصادفی F با m و n درجه آزادی متغیری است که دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

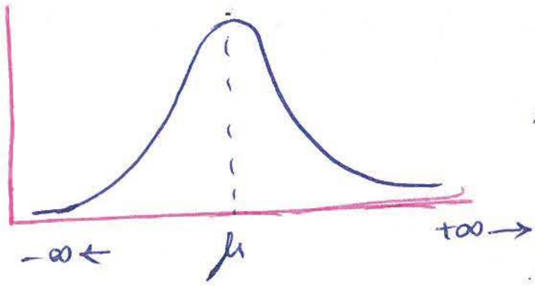
$$f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\dfrac{m}{n}\right)^{m/2} \dfrac{x^{(\frac{m}{2})-1}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

نکته: لازم به تذکر است که توزیع t و f حالت خاصی از توزیع بتا می‌باشند.

9) متغیر تصادفی نرمال: متغیر تصادفی x متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای μ و σ^2 خواهد بود اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

توزیع نرمال به صورت زنگی شکل خواهد بود که نسبت به μ حالت تقارن خواهد داشت:



نکته: لازم به ذکر است که اگر X دارای توزیع با پارامترهای μ و σ^2 باشد، آنگاه $Y=\alpha X+\beta$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\alpha\mu+\beta$ و $\alpha^2\sigma^2$ خواهد بود.

نکته: اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد در نتیجه $Y=(X-\mu)/\sigma$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای 0 و 1 خواهد بود؛ چنین متغیر تصادفی را (متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد) خوانده می‌شود.

10) متغیر تصادفی ارلنگ: متغیر تصادفی ارلنگ دارای ارتباط تنگاتنگی با متغیرهای تصادفی نمایی و گامایی می‌باشد. تصور کنید که آزمایش شامل K مرحله پشت سر هم باشد و متوسط زمان انجام کل آزمایش برابر $1/\mu$ فرض شود. اگر زمان انجام هرکدام از K آزمایش متغیر تصادفی نمایی باشد، در نتیجه متغیرهای تصادفی نمایی برابر $K\mu$ خواهد بود.

اگر Y_i برابر زمان انجام آزمایش در i امین $(i=1,2,\dots)$ مرحله باشد، خواهیم داشت:

$$g(Y_i) = K\mu\, e^{-K\mu Y_i} \quad ; \quad 0 < Y_i < \infty$$

زمان انجام کل آزمایشات به صورت زیر خواهد بود:

$$X = \sum_{i=1}^{K} Y_i$$

در نتیجه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر خواهد بود:

$$f_{(x)} = \frac{(K\mu)^K}{(K-1)!} x^{K-1} e^{-K\mu x} \quad ; \quad 0 < x < \infty$$

11) متغیر تصادفی فوق نمایی: فرض کنید که راننده برای رفتن به سر کار، می‌تواند دو مسیر 1 و 2 را. اگر مدت زمان طی نمودن آن‌ها به ترتیب متغیرهای نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند $\longleftrightarrow$ با احتمال P و $1-P$ انتخاب بشوند. اگر X برابر زمان رسیدن به مقصد در یک روز شخص باشد، خواهیم داشت:

⑤ تعدادی بر تئوری احتمالات

$$P\{X>x\} = P\{Y_1>x \mid \text{مسیر اول انتخاب شود}\}P + P\{Y_2>x \mid \text{مسیر دوم انتخاب شود}\}(1-P)$$

$$= P\int_x^{\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1}\,dy_1 + (1-P)\int_x^{\infty}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y_2}\,dy_2$$

بدین ترتیب تابع توزیع تجمعی این متغیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x) = 1 - P\{X>x\}$$

$$= 1 - P\int_x^{\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1}\,dy_1 + (1-P)\int_x^{\infty}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y_2}\,dy_2$$

تابع چگالی احتمال آن نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = P\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-P)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \quad ; \quad 0<x<\infty$$

نکته: اگر X متغیر تصادفی فوق نمایی، Y متغیر تصادفی نمایی و Z متغیر تصادفی ارلنگ باشد، هنگامی که هر سه دارای میانگین مساوی باشند خواهیم داشت:

$$Var(Z) \leq Var(Y) \leq Var(X)$$

- امید ریاضی (ارزش انتظاری، حد متوسط):

- حالت منفصل: اگر X متغیر تصادفی منفصل باشد که تابع توزیع احتمال آن برابر $P(x)$ باشد، امید ریاضی متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(x) = \sum X.P(x)$$

به عبارت دیگر امید ریاضی متغیر X عبارت از میانگین وزنی مقادیری که X خواهد بود که وزن هر مقدار عبارت از احتمال مفروض برای آن مقدار مفروض می‌باشد.

نکته:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

به شرطی که $|q|<1$ باشد.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

- حالت پیوسته: اگر X متغیر تصادفی پیوسته باشد که تابع چگالی احتمال آن برابر $f(x)$ باشد، امید ریاضی متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

نکته: اگر X متغیر تصادفی، تابع توزیع احتمال $P_X(x)$ باشد، سپس برای هر تابعی از X مانند $g(x)$ خواهیم داشت:

$$E(g(x)) = \sum_{x:P_X(x)>0} g(x)P_X(x) \qquad E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$$

- قضیه: اگر a و b مقادیر ثابتی باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

- تعریف: امید ریاضی متغیر تصادفی X یعنی E(X) به عنوان «میانگین» یا «ممان اول» X نام برده می‌شود.

کمیت $E[X^n]$ که در آن $n\geq 1$ می‌باشد به عنوان n امین ممان X نامیده می‌شود.

$$E[X^n] = \begin{cases} \sum x^n P_X(x) & \text{اگر } X \text{ منفصل باشه} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx \longrightarrow & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشه} \end{cases}$$

- تعریف: واریانس یا پراش متغیر تصادفی X بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Var(X) = E[(X-E[X])^2]$$

واریانس X معیاری است جهت اندازه‌گیری مجموع مربعات انحراف X از میانگین آن.

نکته: فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f و همچنین $E[X]=\mu$ باشد:

$$Var(X)=E[(X-\mu)^2]$$

$$=E[X^2-2\mu X+\mu^2]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2-2\mu x+\mu^2)f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx-2\mu\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,dx+\mu^2\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$$

$$=E[X^2]-2\mu\mu+\mu^2$$

$$\boxed{=E[X^2]-\mu^2}$$

نکته: همچنین برای حالت منفصل آن می‌توان اثبات نمود:

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2$$

- قضیه: اگر a و b مقادیر ثابتی باشند آنگاه خواهیم داشت:

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

- متغیرهای تصادفی با توزیع توام:

- تعریف: برای هر دو متغیر تصادفی X و Y، تابع توزیع تجمعی احتمال توام X, Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(a,b)=P\{X\leq a, Y\leq b\} \qquad a<\infty,\ b<\infty$$

تابع توزیع تجمعی X یا Y می‌تواند به صورت زیر از توزیع تجمعی احتمال توام X و Y بدست آید:

$$F_X(a)=P\{X\leq a\}=P\{X\leq a, Y<\infty\}=F(a,\infty)$$

$$F_Y(b)=P\{Y\leq b\}=P\{X<\infty, Y\leq b\}=F(\infty,b)$$

در مواردی که هر دو متغیرهای تصادفی منفصل باشند، تابع توزیع احتمال توام X, Y بصورت زیر تعریف می‌گردند:

$$P\{X,Y\}=P\{X=x, Y=y\} \Longrightarrow \begin{cases} P_X(x)=\sum P(x,y) \\ P_Y(y)=\sum P(x,y) \end{cases}$$

- **تعریف:** متغیرهای X و Y پیوسته توأم گفته می‌شوند اگر تابعی بصورت $f(X,Y)$ بر روی همه اعداد حقیقی X و Y تعریف شود که برای هر مجموعه A و B از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$P\{X\in A, Y\in B\}=\iint_{B\,A} f(x,y)\,dx\,dy$$

~~تابع چگالی X یا Y می‌تواند به صورت زیر از روی تابع ۱ اشاره شود در بالا بدست آید:~~

$$f_X(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_Y(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

- **تعریف:** توابع $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ نمایانگر تابع چگالی و توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوسته و منفصل X_1 تا X_n خواهند بود اگر داشته باشیم:

برای حالت پیوسته: $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\geq 0 \qquad -\infty < x_i < \infty \quad ; \quad i=1,2,\dots,\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{+\infty}dx_2\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}dx_n f(x_1,x_2,\dots,x_n)=1$$

برای حالت منفصل: $P(x_1,x_2,\dots,x_n)\geq 0$ برای تمام x_i ها $\quad i=1,2,\dots,n$

$$\sum_{x_1 \text{همه}}\sum_{x_2 \text{همه}}\cdots\sum_{x_n \text{همه}} P(x_1,x_2,\dots,x_n)=1$$

تابع توزیع تجمعی توأم این متغیرها به صورت زیر تعریف می‌شود:

پیوسته $\rightarrow$ $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}du_1\int_{-\infty}^{x_2}du_2\cdots\int_{-\infty}^{x_n}du_n f(u_1,u_2,\dots,u_n)$

منفصل $\rightarrow$ $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{u_1\leq x_1}\sum_{u_2\leq x_2}\cdots\sum_{u_n\leq x_n} P(u_1,u_2,\dots,u_n)$

از تعریف بالا مشخص است که $F(-\infty,x_2,\dots,x_n)$ برابر 0 و $F(\infty,\infty,\dots,\infty)$ برابر 1 است.

- احتمال آنکه $a_i\leq X_i\leq b_i$ برای $i=1,2,\dots,n$ باشد به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$P(a_1\leq X_1\leq b_1, a_2\leq X_2\leq b_2,\dots,a_n\leq X_n\leq b_n)=\begin{cases}\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2\cdots\int_{a_n}^{b_n}dx_n f(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \sum_{x_1=a_1}^{b_1}\sum_{x_2=a_2}^{b_2}\cdots\sum_{x_n=a_n}^{b_n}P(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{cases}$$

- **متغیرهای تصادفی مستقل:** متغیرهای تصادفی X و Y مستقل نامیده می‌شوند اگر برای همه a و b داشته باشیم:

$$P\{X\leq a, Y\leq b\}=P\{X\leq a\}P\{Y\leq b\} \rightsquigarrow F(a,b)=F_X(a)F_Y(b)$$

در حالت احتمال توأم X, Y هنگامی X و Y مستقل گفته می‌شوند که برای همه مقادیر a, b داشته باشیم:

اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال توأم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$$

همچنین اگر متغیرهای تصادفی گسسته باشند، خواهیم داشت:

$$P(x,y)=P_X(x)\,P_Y(y)$$

- قضیه: اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، در نتیجه خواهیم داشت:

$$E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]\,E[h(Y)]$$

- تعریف: کواریانس، همراهی دو متغیر تصادفی X و Y را با $Cov(X,Y)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Cov(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$
$$=E[XY]-E[X]E[Y]$$

نکته: توجه داشته باشید اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، $Cov(X,Y)=0$ خواهد بود.

نکته: مقدار مثبت کواریانس X و Y به معنای این است که مقدار متغیر Y با افزایش متغیر X روبه افزایش خواهد گذاشت و کواریانس X و Y اگر منفی باشد نشان دهنده‌ی آن است که با افزایش متغیر X، متغیر Y کاهش خواهد یافت.

- قضیه: اگر X متغیر تصادفی به صورت $X=b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3+\cdots+b_nX_n$ باشد که X_i نیز خودش متغیر تصادفی است ($i=1,2,\ldots,n$)، واریانس X به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{n}\left[b_i^2\,Var(X_i)+2\sum b_ib_j\,Cov(X_i,X_j)\right]$$

و اگر X_i مستقل از هم باشند:

$$Var(X)=\sum b_i^2\,Var(X_i)$$

- تعریف: X_1، X_2، ... و X_n متغیرهای تصادفی مستقل نامیده می‌شوند اگر برای تمام مقادیر a_1، a_2، ...، a_n داشته باشیم:

$$P\{X_1\le a_1, X_2\le a_2, \ldots, X_n\le a_n\}=P\{X_1\le a_1\}P\{X_2\le a_2\}\cdots P\{X_n\le a_n\}$$

- تابع مولد گشتاور: قبل از وارد شدن به مبحث تابع مولد گشتاور، تعریف زیر را ارائه می‌کنیم:

- تعریف: k امین گشتاور حول مبدا مختصات یک متغیر تصادفی منفصل یا پیوسته به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$E[(X)^k]=\begin{cases}\sum_{x_i\in S} x_i^k P(x_i) & \longleftrightarrow \text{گسسته}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx & \longleftrightarrow \text{پیوسته}\end{cases}$$

k امین گشتاور یک متغیر تصادفی به عنوان k امین گشتاور یک توزیع نیز نامیده می‌شود. توجه شود که اولین گشتاور حول مبدا مختصات متغیر تصادفی X همان امید ریاضی X خواهد بود.

فصل ۱

- تعریف: K امین ممان حول میانگین توزیع یک متغیر تصادفی منفصل یا پیوسته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E[(X-E[X])^k] = \begin{cases} \sum_{x_i} (x_i - E[X])^k\, p(x_i) \longleftrightarrow \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-E[X])^k f(x) \longleftrightarrow \text{پیوسته} \end{cases}$$

نکته: دومین ممان حول میانگین متغیر تصادفی X یعنی $E[(X-E[X])^2]$ همان واریانس X خواهد بود.

نکته: ممان های اول و دوم برای توضیح دو خاصیت مهم یک توزیع کافی هستند: خاصیت اول عبارت از این است که توزیع کجا متمرکز شده است و خاصیت دوم این است که درجه تمرکز آن حول آن مرکز چقدر است.

حال با در نظر گرفتن دو تعریف فوق به تعریف تابع مولد ممان می‌پردازیم:

- تعریف: تابع مولد ممان $\phi(t)$ متغیر تصادفی X برای همه مقادیر t به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\phi(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum e^{tx_i} p(x_i) \longleftrightarrow \text{گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx \longleftrightarrow \text{پیوسته} \end{cases}$$

تابع $\phi(t)$ بدین علت تابع مولد ممان نامیده می‌شود که تمام ممان های X با مشتق گیری از $\phi(t)$ بدست خواهد آمد.

نکته:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

نکته: تابع مولد ممان مجموع چند متغیر تصادفی مستقل برابر حاصلضرب توابع مولد ممان هر کدام از آنها خواهد بود.

نکته: تابع مولد ممان هر توزیع منحصر به فرد بوده و منحصراً نمایانگر آن توزیع خواهد بود.

- نامساوی مارکوف: اگر X متغیر تصادفی باشد که فقط مقادیر غیر منفی را اختیار نماید، در این صورت برای هر مقدار $a>0$ خواهیم داشت:

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

- نامساوی چبیشف: اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه برای هر مقدار $k>0$ خواهیم داشت:

$$P\{|X-\mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

نکته: اهمیت نامساوی های شرح داده شده در آن است که می‌توان محدوده‌ای از احتمالات یک متغیر تصادفی هنگامی که فقط میانگین آن و یا میانگین و واریانس آن مشخص است را بدست آورد.

- احتمال شرطی و امید ریاضی شرطی:

- حالت منفصل: تابع توزیع احتمال X به شرط Y به صورت زیر خواهد بود:

$$P_{X|Y}(x|y) = P\{X=x \mid Y=y\}$$

$$= \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}$$

$$= \frac{P(x,y)}{P_Y(y)}$$

نکته: برای تمام مقادیر Y به صورت $P\{Y=y\}>0$ صدق می‌کند.

نکته: اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل از یکدیگر باشند، خواهیم داشت:

$$P_{X|Y}(x|y) = P\{X=x\}$$

- حالت پیوسته: اگر X و Y دارای توزیع چگالی احتمال توأم $f(x,y)$ باشند، در نتیجه تابع چگالی احتمال X به شرط آنکه $Y=y$ باشد، به صورت زیر برای تمام مقادیر $f_Y(y)>0$ تعریف می‌گردد:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \longrightarrow \int f(x,y)\,dx$$

امید ریاضی شرطی X به شرط $Y=y$ برای تمام مقادیر ممکنه Y به طوری که $f_Y(y)>0$ باشد، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

- محاسبه امید ریاضی با شرط‌گذاری: برخی موارد برای محاسبه امید ریاضی یک متغیر تصادفی می‌توان شرطی بودن را بر روی این متغیر(ها) اعمال نموده تا با جمع بستن روی مقادیر ممکنه شرط، آن شرط را حذف کنیم.

خاصیت مهم امید ریاضی شرطی آن است که برای تمام متغیرهای تصادفی X و Y داشته باشیم:

$$E[X] = E[E[X|Y]]$$

اگر Y متغیر تصادفی منفصل باشد، در نتیجه از رابطه فوق می‌توان داشت:

$$E[X] = \sum E[X|Y=y]\,P\{Y=y\}$$

اگر Y متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f_Y(y)$ باشد:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X|Y=y]\,f_Y(y)\,dy$$

- محاسبه احتمال با شرط‌گذاری: نه تنها با شرط‌گذاری روی یک متغیر تصادفی می‌توان امید ریاضی را بدست آورد، بلکه می‌توان بعضی از احتمال‌ها را با این روش نیز محاسبه کرد.

$$P(E) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} P(E|Y=y)\,f_Y(y)\,dy \\ \sum P(E|Y=y)\,P\{Y=y\} \end{cases}$$

فصل دوم

فصل دوم

1- اگر زمان لازم برای تعمیر یک ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{2}$ باشد (در هر ساعت دو ماشین تعمیر شود یا $\lambda=2$ باشد) خواهیم داشت:

الف) احتمال اینکه تعمیرات بیش از نیم ساعت طول بکشد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{T>1/2\}=e^{-1/2\times 2}=e^{-1}$$

ب) با توجه به خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی، احتمال اینکه زمان یک تعمیرات بیش از 12 و نیم ساعت طول بکشد مشروط بر اینکه بدانیم 12 ساعت از تعمیر آن ماشین می‌گذرد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{T>12+1/2 \mid T>12\}=P\{T>1/2\}=e^{-1}$$

2- الف) اگر زمان خدمت دهی به مشتریان قطعاً برابر 10 باشد، احتمال مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{T_A>T_C>T_B\}=0$$

ب) اگر ~~زمان خدمت دهی با احتمال مساوی برابر 1، 2 و یا 3 دقیقه باشد~~ حادثه‌ی خارج شدن شخص A بعد از اشخاص B و C تنها در حالتی رخ می‌دهد که زمان سرویس دهی به B و C برابر 1 دقیقه باشد در حالی که سرویس دهی به شخص A 3 دقیقه طول بکشد. همانطور که گفته شده است زمان خدمت دهی در این حالت با احتمال مساوی برابر 1، 2 و 3 دقیقه می‌باشد (یعنی احتمال رخ دادن هر کدام از آنها برابر $\frac{1}{3}$ است). بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$P\{T_A>T_C>T_B\}=1/3\times 1/3\times 1/3=1/27$$

ج) در حالتی که زمان خدمت دهی دارای توزیع نمایی با متوسط $\frac{1}{\mu}$ باشد (یعنی μ نفر در واحد زمان سرویس دهی می‌شوند)، احتمال مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{T_A>T_C>T_B\}=\underbrace{\left(\frac{\mu}{\mu+\mu}\right)}_{\text{احتمال اینکه شخص B زودتر از شخص A خارج گردد}}\times\underbrace{\left(\frac{\mu}{\mu+\mu}\right)}_{\text{احتمال اینکه شخص C زودتر از شخص A خارج گردد}}=\frac{1}{4}$$

3- اگر عمر مفید رادیو دارای توزیع نمایی با متوسط 10 سال باشد ($\lambda = \frac{1}{10}$)، احتمال این که رادیو سالم علی رغم 10 سال کار کند بشرط این که در حال حاضر 10 سال کار کرده است با استفاده از خاصیت بی حافظگی توزیع نمایی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{T > 10+10 \mid T > 10\} = P\{T > 10\}$$
$$= e^{-0.1 \times 10} = e^{-1}$$

(4) نرخ شکست یک متغیر تصادفی غیر منفی پیوسته و مستقل از هم $\longleftrightarrow$ که از توزیع نمایی پیروی می کنند برابر $r(t) \leftrightarrow$ می باشد

$$r_i(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{r_1(t)}{r_1(t)+r_2(t)} = \frac{\frac{f_1(t)}{1-F_1(t)}}{\frac{f_1(t)}{1-F_1(t)} + \frac{f_2(t)}{1-F_2(t)}}$$
$$= \frac{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{1-(1-e^{\lambda_1 t})}}{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{1-(1-e^{\lambda_1 t})} + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{1-(1-e^{\lambda_2 t})}}$$
$$= \frac{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}}}{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}} + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \quad \mathrm{I}$$

در صورت سوال به جای بودن
متغیرها اشتباه نوشته شده است.
اصلاح شود

با توجه به این که متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 از توزیع نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 پیروی می کنند، احتمال موجود در صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{X_1 < X_2 \mid \min(X_1, X_2) = t\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \quad \mathrm{II}$$

از تساوی موجود در میان I و II عبارت مفروض در صورت سوال بدست می آید. پس خواهیم داشت:

$$P\{X_1 < X_2 \mid \min(X_1, X_2) = t\} = \frac{r_1(t)}{r_1(t)+r_2(t)}$$

5) برای این که نشان دهیم تابع نرخ شکست توزیع گاما با پارامترهای n و λ به ازای $n \geq 1$ صعودی است، از آن با استفاده از نرم افزار Maple مشتق می گیریم:

خروجی نرم افزار قرار داده شود

شکل اضافه شود

6- اگر کوتاه کردن و مرتب کردن مو دارای توزیع نمایی به ترتیب با میانگین های 15 و 20 دقیقه باشد (یعنی $\lambda_1=4$ و $\lambda_2=3$ باشد)، احتمال این که علی زودتر از حسین کارش تمام شود (برسد) با استفاده از خاصیت پنجم توزیع نمایی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{T_{Ali} < T_{Hos}\} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$= \frac{3}{4+3} = \frac{3}{7}$$

7- برای دو متغیر تصادفی مستقل X و Y که دارای توزیع نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 هستند، تابع چگالی احتمال $Z=Min(X,Y)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f(Z)=P\{Z>t\}$$

$$=P\{min(X,Y)>t\}$$

$$=1-P\{X<t\}P\{Y<t\} = \prod_{i=1}^{2} \longleftrightarrow e^{-\lambda_i t}$$

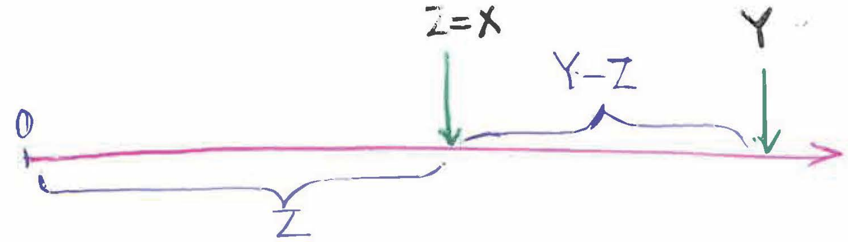
بدین صورت، تابع چگالی احتمال Z به شرط این که $Z=X$ باشد، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f(Z)=P\{Z>t \mid Z=X\}$$

$$=1-P\{X<t\} = \longleftrightarrow e^{-\lambda_1 t}$$

[redacted]

8- با توجه به این که در $P\{Y-Z>t \mid Z=x\}$ متغیر Z برابر متغیر تصادفی X در نظر گرفته شده است، پس حتما متغیر Y بعد از متغیر X رخ می دهد (چون در صورت سوال 7 ذکر شده $Z=min(X,Y)$ (اعداد کوچک)). پس ما می خواهیم که در فاصله ی $Y-Z$ رخ دهد، دارای احتمال λ_2 خواهد بود. شکل زیر گویای این مسئله است:



9- با توجه به اینکه اتومبیل‌ها بر اساس فرآیند پواسون با میانگین 3 اتومبیل در ساعت ($\lambda_b=3$) از اتوبان عبور می‌کنند، احتمال سالم رد شدن علی در شرایط مختلف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

الف) اگر زمان گذشتن علی از اتوبان برابر 2، 5، 10 و 20 ثانیه باشد ($\frac{1}{1800}$، $\frac{1}{720}$، $\frac{1}{360}$ و $\frac{1}{180}$ ساعت باشد):

$$P\{N(\tfrac{1}{1800})=0\} = e^{-3\times\frac{1}{1800}} = e^{-\frac{1}{600}}$$

$$P\{N(\tfrac{1}{720})=0\} = e^{-3\times\frac{1}{720}} = e^{-\frac{1}{240}}$$

$$P\{N(\tfrac{1}{360})=0\} = e^{-3\times\frac{1}{360}} = e^{-\frac{1}{120}}$$

$$P\{N(\tfrac{1}{180})=0\} = e^{-3\times\frac{1}{180}} = e^{-\frac{1}{60}}$$

ب) اگر زمان گذشتن علی از اتوبان از توزیع نمایی پیروی کند و دارای میانگین 10 ثانیه باشد (یعنی علی در هر ساعت می‌تواند 360 بار از اتوبان رد شود، $\lambda_a=360$)، طبق خاصیت پنجم توزیع نمایی احتمال مذکور به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\{T_a<T_b\} = \frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b}$$

$$= \frac{360}{360+3} = 0.9917$$

10- اگر در مسئله 9 علی قادر باشد در حالتی صدمه نبیند که هیچ و یا فقط یک ماشین حین عبور در حال عبور باشد (یعنی اگر در حین عبور علی هیچ ماشین یا یک ماشین عبور کند، صدمه نمی‌بیند)، احتمال سالم عبور کردن وی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = 5, 10, 20, 30 \text{ ثانیه} \longrightarrow S = \frac{1}{720}, \frac{1}{360}, \frac{1}{180}, \frac{1}{120} \text{ ساعت}$$

$$P\{N(\tfrac{1}{720})\leq 1\} = P\{N(\tfrac{1}{720})=0\} + P\{N(\tfrac{1}{720})=1\}$$

$$= e^{-\frac{1}{240}} + e^{-\frac{1}{240}}\times\left(\frac{1}{240}\right) = \frac{241}{240}e^{-\frac{1}{240}}$$

$$P\{N(\tfrac{1}{360})\leq 1\} = e^{-\frac{1}{120}} + e^{-\frac{1}{120}}\times\left(\frac{1}{120}\right) = \frac{121}{120}e^{-\frac{1}{120}}$$

$$P\{N(\tfrac{1}{180})\leq 1\} = e^{-\frac{1}{60}} + e^{-\frac{1}{60}}\times\left(\frac{1}{60}\right) = \frac{61}{60}e^{-\frac{1}{60}}$$

$$P\{N(\tfrac{1}{120})\leq 1\} = e^{-\frac{1}{40}} + e^{-\frac{1}{40}}\times\left(\frac{1}{40}\right) = \frac{41}{40}e^{-\frac{1}{40}}$$

۱- اگر $s<t$ باشد، احتمال رخ دادن یک حادثه در بازه زمانی $[0,s)$ مشروط براینکه در بازه ی $[0,t]$ تنها یک اتفاق رخ داده است بصورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{T_1<s \mid N(t)=1\} = \frac{P\{T_1<s,\ N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$= \frac{P\{\text{رخ دادن یک حادثه در } [0,s) \text{ و رخ دادن هیچ حادثه در } [s,t)\}}{P\{N(t)=1\}}$$

با توجه به مستقل بودن متغیرهای تصادفی پوآسان از یکدیگر رابطه ی بالا را می توان بصورت زیر نوشت:

$$= \frac{P\{\text{رخ دادن یک حادثه در } [0,s)\}\, P\{\text{رخ دادن هیچ حادثه در } [s,t)\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$= \frac{(\lambda s e^{-\lambda s})(e^{-\lambda(t-s)})}{\lambda t\, e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

با استفاده از توضیحات فوق میتوان احتمال رخ دادن k حادثه در بازه زمانی $[0,s)$ مشروط براینکه در بازه ی $[0,t]$ n اتفاق رخ داده باشد ($n>k$) را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$P\{N(s)=k \mid N(t)=n\} = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} \qquad k=0,1,2,\dots,n$$

۱۲- اگر نرخ ورود زنان و مردان به یک فروشگاه دارای توزیع پوآسون باشد و به ترتیب دارای نرخ ورود 2 و 4 نفر در ساعت باشد ($\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$) احتمال اینکه هیچ یا یک مرد زودتر از 3 زن وارد این فروشگاه شوند به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{S_0^2 < S_3^1\} = \sum_{k=0}^{3+0-1}\binom{3+0-1}{k}\left(\frac{4}{2+4}\right)^k\left(\frac{2}{2+4}\right)^{3+0-1-k}$$

$$P\{S_1^2 < S_3^1\} = \sum_{k=1}^{3+1-1}\binom{3+1-1}{k}\left(\frac{4}{2+4}\right)^k\left(\frac{2}{2+4}\right)^{3+1-1-k}$$

بدین ترتیب احتمال اینکه حداقل دو مرد قبل از ورود سومین زن وارد این فروشگاه شوند برابر متمم مجموع احتمال های بالا می باشد؛ پس خواهیم داشت:

$$P\{\text{حداقل دو مرد قبل از ورود سومین زن وارد این فروشگاه شوند}\} = 1 - P\{S_0^2 < S_3^1\} - P\{S_1^2 < S_3^1\}$$

13- اگر حوادث براساس توزیع پواسون با نرخ 2 اتفاق در ساعت رخ دهد، احتمال های خواسته شده به صورت زیر محاسبه می شوند:

الف) احتمال رخ ندادن هیچ حادثه ای در بین ساعت 8 و 9 برابر خواهد بود با:

$$P\{N(9-8)=0\} = P\{N(1)=0\}$$
$$= e^{-2\times 1} \times \frac{(2\times 1)^0}{0!} = e^{-2}$$

ب) با توجه به این که حوادث با نرخ $\lambda=2$ رخ می دهند، متوسط زمانی که طول می کشد تا 4 اتفاق رخ دهد برابر خواهد بود با:

$$E[S_4] = \lambda t$$
$$4 = 2\times t \Rightarrow t=2$$ ساعت

ج) احتمال این که دو حادثه یا بیشتر در فاصله بین ساعت 6 تا 8 رخ دهد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{N(8)-N(6)\geq 2\} = P\{N(2)\geq 2\}$$
$$= 1-P\{N(2)<2\}$$
$$= 1-P\{N(2)=0\}-P\{N(2)=1\}$$
$$= 1-e^{-2\times 2}\times\frac{(2\times 2)^0}{0!}-e^{-2\times 2}\frac{(2\times 2)^1}{1!} = 1-5e^{-4}$$

14- اگر امواج دارای توزیع پواسون با متوسط 3 ورودی در دقیقه به یک دستگاه باشد و هم چنین اگر امواج ورودی با احتمال $\frac{2}{3}$ به ثبت برسند خواهیم داشت:

الف) احتمال این که در فاصله زمانی t هیچ موجی به ثبت نرسد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{X(t)=0\} = e^{-3\times 2/3\times t}\,\frac{(3\times 2/3\times t)^0}{0!} = e^{-2t}$$

لازم به ذکر است که در این حالت به دلیل احتمالی بودن به ثبت رسیدن امواج، امواج وارد شده به این دستگاه با متوسط $3\times 2/3$ به ثبت می رسند.

ب) امید ریاضی این متغیر تصادفی نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E[X(t)] = (3\times 2/3)\times t = 2t$$

15- اگر 5 درصد اتومبیل های که از اتوبان بر اساس توزیع پوآسون با نرخ یک اتومبیل در دقیقه عبور می کنند، بنز باشند خواهیم داشت:

الف) احتمال این که در طول یک ساعت (60 دقیقه) حداقل یک اتومبیل بنز از این اتوبان عبور کند به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{N_1(60) \geq 1\} = 1 - P\{N_1(60) = 0\}$$
$$= 1 - e^{-1 \times 5/100 \times 60} \times \frac{(1 \times 5/100 \times 60)^0}{0!} = 1 - e^{-3}$$

ب) اگر امید ریاضی تعداد اتومبیل های بنز عبور کرده در طول یک مدت برابر $E[N_1]$ و تعداد کل اتومبیل های عبور کرده در طول یک مدت برابر $E[N]$ باشد خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} E[N_1] = \lambda p t \\ E[N] = \lambda t \end{array}\right\} \longrightarrow E[N] = \frac{E[N_1]}{p}$$
$$= \frac{10}{0.05} = 200$$

ج) احتمال این که 5 اتومبیل بنز در بین 50 اتومبیل عبور کرده در یک ساعت وجود داشته باشد به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{N_1(60) = 5 \mid N(60) = 50\} = \binom{50}{5} \times \left(\frac{1}{20}\right)^5 \left(\frac{19}{20}\right)^{45}$$

[redacted]

16- اگر مشتری ها بر طبق فرآیند پوآسون با نرخ λ وارد یک بانک شوند خواهیم داشت:

الف) احتمال این که دو مشتری در 20 دقیقه اول وارد بانک شده باشند به شرط این که بدانیم در یک ساعت دو مشتری وارد بانک شده اند، بر اساس خاصیت ششم فرآیند پوآسون به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{N(1/3) = 2 \mid N(1) = 2\} = 1/3 \times 1/3 = 1/9$$

بر اساس خاصیت ششم فرآیند پوآسون احتمال وارد شدن هرکدام از 2 مشتری وارد شده به این بانک در 20 دقیقه اول از توزیع یکنواخت پیروی می کند؛ پس هر کدام از مشتری ها با احتمال $\frac{1}{3}$ در $\frac{1}{3}$ اول بازه زمانی مذکور (1 ساعت) وارد می شوند.

ب) احتمال این که حداقل یک مشتری در 1 دقیقه اول وارد شود به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{\text{واردشدن حداقل یک مشتری در دقیقه اول}\} = P\{N(\tfrac{1}{60})=1 \mid N(1)=2\} + P\{N(\tfrac{1}{60})=2 \mid N(1)=2\}$$

$$= \binom{2}{1}\left(\frac{1}{60}\right)^1\left(\frac{59}{60}\right)^1 + \binom{2}{2}\left(\frac{1}{60}\right)^2\left(\frac{59}{60}\right)^0 = 0.033$$

17- برای محاسبه احتمال رخ دادن n حادثه در فاصله زمانی $t=4$ و $t=5$، ابتدا باید تابع ارزش متوسط را محاسبه کنیم:

$$m(5) - m(4) = 35 - 24 = 11$$

حال خواهیم داشت:

$$P\{N(5)-N(4)=n\} = e^{-11\times(5-4)} \times \frac{(11\times(5-4))^n}{n!} = e^{-11} \times \frac{11^n}{n!}$$

18- با توجه به توضیحات ارائه شده در صورت سوال، تابع نرخ ورود مشتریان در بازه های زمانی مختلف را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \le t < 8 \\ 4 & ; \ 8 \le t < 10 \\ 8 & ; \ 10 \le t < 12 \\ 8 + (t-12) & ; \ 12 \le t < 14 \\ 10 - 2(t-14) & ; \ 14 \le t < 17 \\ 0 & ; \ 17 \le t < 24 \end{cases}$$

بدین ترتیب تابع ارزش متوسط این فرآیند به صورت زیر محاسبه می شود:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(t)\,dt$$

از طرف دیگر، احتمال وارد شدن n مشتری در بازه زمانی $(t, t+s)$ نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P\{N(t+s) - N(t) = n\} = e^{-(m(t+s)-m(t))} \times \frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}$$

به طور کامل

19- الف) با توجه به اینکه نرخ رخ دادن دومین حادثه وابسته به نرخ رخ دادن اولین حادثه است، پس N ها از یکدیگر مستقل نیستند.

ب) اگرچه نوع توزیع N ها پواسون می باشد، اما با توجه به متفاوت بودن تابع ارزش متوسط در بازه های زمانی مختلف، پارامتر مربوط به توزیع آنها یکسان نخواهد بود.

ب) با توجه به این که فرآیند رخ دادن حوادث بر طبق فرآیند پواسون می‌باشد، فاصله زمانی تا رخداد حادثه اول از توزیع نمایی پیروی می‌کند. بنابراین خواهیم داشت:

$$P\{N(0+s)-N(0)\} = P\{T_1>s\}$$

$$= e^{-m(s)}$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $m(s)$ (تابع ارزش متوسط) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m(s) = \int_0^s \lambda(s)ds$$

20 - متغیرهای $X(t)$ ، Y_i و $N(t)$ را به صورت زیر تعریف خواهیم کرد:

$X(t)$: مقدار پول پرداختی

Y_i : مقدار پول پرداختی بیمه نامه

$N(t)$: تعداد بیمه نامه‌های صادر شده تا زمان مورد نظر

بدین ترتیب، میانگین و واریانس پول پرداخت شده توسط شرکت در ۴ هفته به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$N(4) = 5\times 4 = 20$$

$$E[X(4)] = N(4)\,E[Y_4]$$

$$= 20\times 2000 = 40,000$$

$$Var(X(4)) = E[Y_4]\,E[Y_4^2]$$

$$= 2000\times 400,000 = 1.6\times 10^8$$

21 برای اینکه ⇐ شوک نوع اول و دوم رخ دهند، باید شوک سوم دیرتر از هر دو آنها رخ بدهد.

بدین ترتیب، اگر T_i را زمان رسیدن اولین شوک از نوع i ام در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$P\{X_1>s, X_2>t\} = P\{T_1>s, T_3>s, T_2>t, T_3>t\}$$

$$= P\{T_1>s, T_2>t, T_3>\max(s,t)\}$$

$$= e^{-\lambda_1 s}\times e^{-\lambda_2 t}\times e^{-\lambda_3 \max(s,t)}$$

22- نمایی بودن متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 که به کار رفته در مساله ی ۲۱ به صورت زیر به اثبات می رسد.

$$P\{X_1>s\} = P\{X_1>s, X_2>0\}$$
$$= P\{X_1>s, X_2>0, X_3>s\}$$
$$= e^{-\lambda_1 s} \times e^{-\lambda_2 \times 0} \times e^{-\lambda_3 s}$$
$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_3)s}$$

به همین ترتیب، نمایی بودن متغیر تصادفی X_2 نیز به اثبات می رسد.

فصل سوم

۱- با توجه به اینکه وضعیت سیستم تنها و تنها به وضعیت مرحله فعلی بستگی دارد (تعداد توپ های سفید و سیاه در هر کیسه در هر مرحله) ، هم چنین در هر مرحله توپ ها به صورت تصادفی انتخاب و جا به جا می شوند ، لذا می توان فرآیند توضیح داده شده را یک زنجیره مارکوف در نظر گرفت . برای تعیین ماتریس انتقال وضعیت این زنجیره مارکوف ، وضعیت سیستم را برابر با تعداد توپ های سفید درون کیسه ی اول در نظر می گیریم . بدین ترتیب خواهیم داشت :

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

به عنوان مثال P_{11} (احتمال ماندن در وضعیت 1) برابر احتمال جا به جا شدن یک توپ مشکی از کیسه ی اول با توپ مشکی از کیسه دوم و یا جا به جا شدن یک توپ سفید از کیسه اول با توپ سفید از کیسه دوم می باشد که این مقدار به صورت زیر محاسبه می گردد :

$$P_{11} = 2/3 \times 1/3 + 1/3 \times 2/3 = 4/9$$

2- با توجه به اینکه باریدن یا نباریدن باران تنها به باریدن یا نباریدن باران در سه روز گذشته بستگی دارد ، هم چنین باریدن یا نباریدن باران در هر وضعیت احتمالی می باشد ، لذا می توان فرآیند توضیح داده شده را یک زنجیره مارکوف در نظر گرفت . اگر حروف ب و خ به ترتیب بیانگر باریدن و نباریدن باران باشند ، وضعیت های این زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می شوند :

A = { (ب و ب و ب) ، (ب و ب و خ) ، (ب و خ و ب) ، (خ و ب و ب) ، (ب و خ و خ) ، (خ و ب و خ) ، (خ و خ و ب) ، (خ و خ و خ) }

3- با توجه به احتمال های ذکر شده در صورت سوال ، ماتریس انتقال وضعیت برای زنجیره مارکوف مورد بحث به صورت زیر می باشد :

←

$P =$	(ب،ب،ب)	(ب،ب،خ)	(ب،خ،ب)	(ب،خ،خ)	(خ،ب،ب)	(خ،ب،خ)	(خ،خ،ب)	(خ،خ،خ)
(ب،ب،ب)	0.8	0.2	0	0	0	0	0	0
(ب،ب،خ)	0	0	0.4	0.6	0	0	0	0
(ب،خ،ب)	0	0	0	0	0.6	0.4	0	0
(ب،خ،خ)	0	0	0	0	0	0	0.4	0.6
(خ،ب،ب)	0.6	0.4	0	0	0	0	0	0
(خ،ب،خ)	0	0	0.4	0.6	0	0	0	0
(خ،خ،ب)	0	0	0	0	0.6	0.4	0	0
(خ،خ،خ)	0	0	0	0	0	0	0.2	0.8

به عنوان مثال احتمال ماندگاری باران باریدن اگر در سه روز گذشته باران نباریده باشد برابر 0.2 می‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$P_{(\text{خ،خ،خ}),(\text{خ،خ،ب})} = 0.2$$

۴- اگر ماتریس انتقال وضعیت یک زنجیره مارکوف برابر $P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقدار خواسته شده را با استفاده از استقرای ریاضی به صورت زیر ثابت خواهیم کرد:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

پایه استقرا

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n \end{bmatrix}$$

فرض استقرا

حکم این استقرا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} \end{bmatrix}$$

به منظور حل استقرای بالا می‌بایست حکم آن را اثبات کنیم؛ همانطور که می‌دانیم $P^{(n+1)} = P^{(1)} \times P^{(n)}$ است؛ پس خواهیم داشت

$$P^{(n+1)} = P \times P^{(n)}$$

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & W \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

... به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$W = P\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(2P-1)^n\right) + (1-P)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(2P-1)^n\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}P(2P-1)^n + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(2P-1)^n - \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}P(2P-1)^n = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(2P-1)^{n+1}$$

$$X = P\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(2P-1)^n\right) + (1-P)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(2P-1)^n\right) = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(2P-1)^{n+1}$$

$$Y = (1-P)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(2P-1)^n\right) + P\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(2P-1)^n\right) = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(2P-1)^{n+1}$$

$$Z = (1-P)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(2P-1)^n\right) + P\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(2P-1)^n\right) = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(2P-1)^{n+1}$$

بدین ترتیب حکم استقرا [illegible] به اثبات می‌رسد.

5- در هر پرتاب سکه‌های 1 و 2، به ترتیب با احتمال‌های 0.7 و 0.6 شیر ظاهر می‌گردد. ماتریس انتقال وضعیت این زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = \begin{array}{r|cc} & \text{سکه 1 استفاده شود} & \text{سکه 2 استفاده شود} \\ \hline \text{امروز سکه 1 استفاده شود و شیر بیاید} & 0.7 & 0.3 \\ \text{امروز سکه 2 استفاده شود و شیر بیاید} & 0.6 & 0.4 \end{array}$$

همانطور که می‌دانیم در روز نخست هر کدام از سکه‌های 1 و 2، با احتمال $\frac{1}{2}$ پرتاب می‌شوند؛ بنابراین احتمال پرتاب شدن سکه 1 در روز سوم برابر خواهد بود با:

$$L_0 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

$$L_3 = L_0 \times P^3$$

مقدار P^3 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P^3 = P^2 \times P$$

$$= (P \times P) \times P$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.333 \\ 0.666 & 0.334 \end{bmatrix}$$

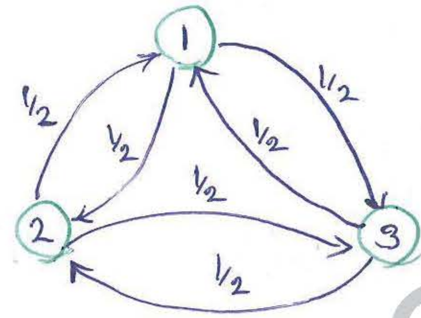
بدین ترتیب L_3 برابر خواهد شد با:

$$L_3 = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \times \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ 0.664 & 0.334 \end{bmatrix} = [0.6665 \quad 0.3335]$$

بنابراین در دور سوم سکه ی 1 با احتمال 0.6665 پرتاب خواهد شد.

6- برای ماتریس انتقال وضعیت P_1 خواهیم داشت:

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



براساس شکل بالا کاملا مشخص است که تمامی وضعیت ها با یکدیگر مرتبط می باشند؛ یعنی 2↔1 ، 3↔1 ، 3↔2 و 3↔1 . بنابراین می توان نتیجه گرفت که در این زنجیره مارکوف یک کلاس خواهد بود. با توجه به اینکه زنجیره مارکوف بالا محدود می باشد پس تمامی وضعیت های آن برگشت پذیر می باشند. اما اگر بخواهیم برگشت پذیری وضعیت های این زنجیره مارکوف را به صورت ریاضی مورد بررسی قرار دهیم خواهیم داشت (به عنوان مثال برای وضعیت 1):

$$f_1^{(1)} = 0$$

$$f_1^{(2)} = 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2$$

$$f_1^{(3)} = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2 \times 1/2$$

$$\vdots$$

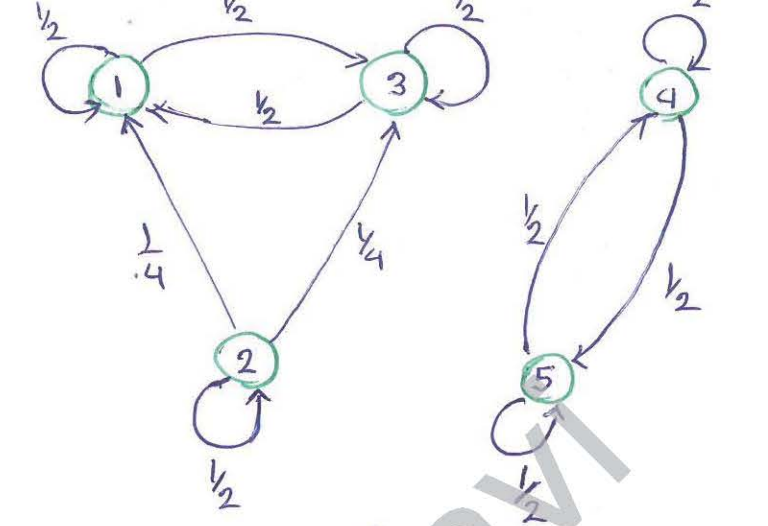
$$f_1^{(n)} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1^{(n)} = 0 + 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1$$

بدین ترتیب وضعیت 1 برگشت پذیر خواهد بود. لازم به ذکر است که برگشت پذیری وضعیت های 2 و 3 نیز به همین منوال صورت می گیرد.

برای ماتریس انتقال وضعیت P_2 خواهیم داشت:

$$
P_3 = \begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
2 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\
3 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
\hline
\end{array}
$$



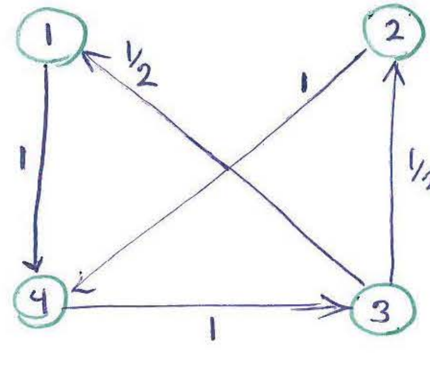
از شکل بالا کاملا مشخص است که وضعیت های 1 و 3 و همچنین 4 و 5 با یکدیگر در ارتباط هستند. بدین ترتیب در زنجیره مارکوف بالا وضعیت 1 و 3 و همچنین 4 و 5 برگشت پذیر می باشند؛ از طرف دیگر کاملا بدیهی است که وضعیت 2 گذرا می باشد. اما اگر بخواهیم برگشت پذیری وضعیت های این زنجیره مارکوف را به صورت ریاضی مورد بررسی قرار دهیم خواهیم داشت (به عنوان مثال برای وضعیت های 2 و 4):

$$
\left.\begin{array}{l}
f_2^{(1)} = 1/2 \\
f_2^{(2)} = 0 \\
\vdots \\
f_2^{(n)} = 0
\end{array}\right\}
\quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_2^{(n)} = 1/2 + 0 + 0 + \cdots = 1/2 < 1
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
f_4^{(1)} = 1/2 \\
f_4^{(2)} = 1/2 \times 1/2 \\
f_4^{(3)} = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \\
\vdots \\
f_4^{(n)} = (1/2)^n
\end{array}\right\}
\quad
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} f_4^{(n)} &= 1/2 + 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2 \times 1/2 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\
&= 1/2 + (1/2) \sum_{n=2}^{+\infty} (1/2)^{n-1} \\
&= 1/2 + (1/2) \sum_{n=0}^{+\infty} (1/2)^{n+1} \\
&= 1/2 + (1/2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n \\
&= 1/2 + 1/4 \times \frac{1}{1-1/2} = 1
\end{aligned}
$$

بدین ترتیب وضعیت 2 گذرا و وضعیت 4 برگشت پذیر می باشد. برگشت پذیری یا گذرا بودن وضعیت های دیگر نیز به همین صورت به اثبات می رسد.

$$P_2 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



بر اساس شکل بالا واضح است که اگر از هر وضعیتی خارج شویم، پس از چند حرکت (حداقل 3 حرکت) دوباره به همان وضعیت برمی‌گردیم؛ بدین ترتیب زنجیره‌ی مارکوف بالا کاهش‌ناپذیر می‌باشد. از طرف دیگر با توجه به محدود بودن تعداد وضعیت‌های این زنجیره مارکوف می‌توان نتیجه‌گیری کرد که تمامی وضعیت‌های آن برگشت‌پذیر هستند. اما اگر بخواهیم برگشت‌پذیری وضعیت‌های این زنجیره مارکوف را به صورت ریاضی مورد بررسی قرار دهیم، خواهیم داشت (به عنوان برای وضعیت 1):

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(1)} &= 0 \\ f_1^{(2)} &= 0 \\ f_1^{(3)} &= 1\times 1\times 1/2 \\ f_1^{(4)} &= 0 \\ f_1^{(5)} &= 0 \\ f_1^{(6)} &= 1\times1\times1/2\times1\times1\times1/2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &\vdots \\ f_1^{(n)} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n/3} \end{aligned}\right\}$$

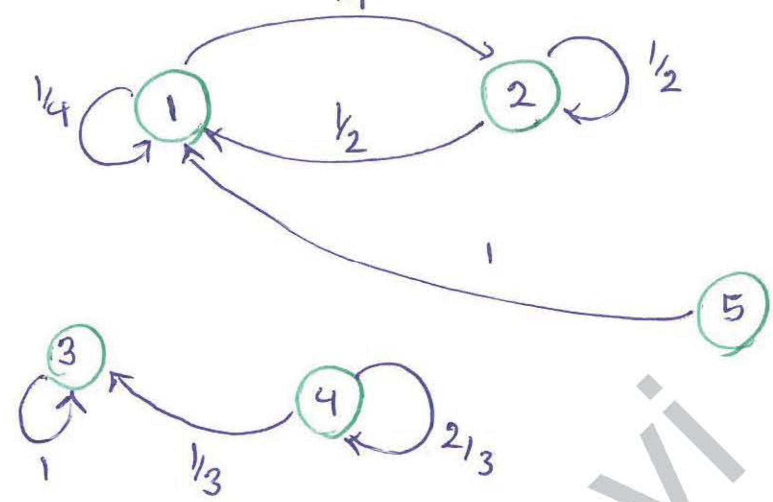
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} f_1^{(n)} &= 0+0+1/2+0+0+\left(\tfrac12\right)^2+\cdots+\left(\tfrac12\right)^{n/3} \\ &= 1/2+(1/2\times1/2)\times\sum_{n=2}^{+\infty}(1/2)^{n-2} \\ &= 1/2+\left(\tfrac14\right)\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tfrac12\right)^n \\ &= 1/2 + 1/4\times\frac{1}{1-1/2} \\ &= 0.5+0.25\times2 = 1 \end{aligned}$$

بدین ترتیب، وضعیت 1 برگشت‌پذیر می‌باشد. برگشت‌پذیری وضعیت‌های 2، 3 و 4 نیز به همین صورت می‌باشد.

برای ماتریس انتقال وضعیت P_3 خواهیم داشت:

$\Leftarrow$

$$P_4 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



زنجیره مارکوف بالا بسیار ساده می‌باشد؛ کاملاً بدیهی است که وضعیت‌های 1، 2 و 3 برگشت‌پذیر و وضعیت‌های 4 و 5 گذرا می‌باشند. اگر بخواهیم برگشت‌پذیری وضعیت‌های این زنجیره مارکوف را به صورت ریاضی مورد بررسی قرار دهیم، خواهیم داشت:

(به عنوان مثال برای وضعیت‌های 2 و 3)

$$\left.\begin{aligned} f_2^{(1)} &= 1/2 \\ f_2^{(2)} &= 1/2 \times 3/4 \\ f_2^{(3)} &= 1/2 \times 1/4 \times 3/4 \\ f_2^{(4)} &= 1/2 \times 1/4 \times 1/4 \times 3/4 \\ &\vdots \\ f_2^{(n)} &= 1/2 \times (1/4)^{n-2} \times 3/4 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} f_2^{(n)} &= 1/2 + 1/2 \times 3/4 + 1/2 \times 1/4 \times 3/4 + \cdots \\ &= 1/2 + (1/2 \times 3/4) \sum_{n=2}^{+\infty} (1/4)^n \\ &= 1/2 + (1/2 \times 3/4) \sum_{n=0}^{+\infty} (1/4)^n \\ &= 1/2 + (1/2 \times 3/4) \times \frac{1}{1 - 1/4} = 1 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} f_3^{(1)} &= 1 \\ f_3^{(2)} &= 0 \\ &\vdots \\ f_3^{(n)} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_3^{(n)} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

بدین ترتیب وضعیت‌های 2 و 3 برگشت‌پذیر می‌باشند. برگشت‌پذیر یا گذرا بودن وضعیت‌های دیگر نیز، به همین منوال به اثبات می‌رسد.

پس از چندین مرحله وارد وضعیت j شده در حالت خوش‌بینانه تنها پس از ۱ مرحله از وضعیت i وارد وضعیت j می‌شود

اما در بدبینانه‌ترین حالت، در زنجیره مارکوفی با M وضعیت می‌توان با طی کردن M مرحله از وضعیت i به وضعیت j رسید. شکل زیر گویای این مهم است:

۸- با توجه به اینکه وضعیت‌های i و j با یکدیگر مرتبط می‌باشند، بدین ترتیب P_{ij}^n برابر صفر خواهد بود. $n>0$ زیرا است، اگر از وضعیت i خارج شویم و وارد وضعیت j شویم، دیگر وارد وضعیت i نخواهیم شد (چون وضعیت j با وضعیت i مرتبط نیست). این مهم با برگشت‌پذیری وضعیت i در تناقض می‌باشد. نتیجتاً در این شرایط $P_{ij}=0$ باشد.

۹- در مدل قدم زدن تصادفی احتمال حرکت رو به جلو و حرکت رو به عقب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$P(Y_i=1)=P$ حرکت رو به جلو

$P(Y_i=-1)=1-P$ حرکت رو به عقب

در این مدل تنها در تعداد حرکات زوج امکان برگشت به وضعیتی که از آن شروع کرده‌ایم وجود دارد (در این مدل برای برگشت به یک وضعیت باید نیمی از مراحل طی شده را رو به جلو و نیمی دیگر را رو به عقب طی کنیم). بدین ترتیب احتمال بازگشت به یک وضعیت در تعداد حرکات فرد مساوی صفر خواهد بود:

$$P_{ii}^{(1)}=P_{ii}^{(3)}=\cdots=P_{ii}^{(2n+1)}=0 \qquad n\in\mathbb{N}$$

درصورتیکه احتمال بازگشت به یک وضعیت در این مدل در تعداد مراحل زوج به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{ii}^{(2n)}=\binom{2n}{n}\left[P(Y_i=1)\right]^n\left[P(Y_i=-1)\right]^n$$

$$=\binom{2n}{n}P^n(1-P)^n \qquad n\in\mathbb{N}$$

با استفاده از تقریب استرلینگ خواهیم داشت:

$$P_{ii}^{(2n)}=\frac{(4P\times(1-P))^n}{\sqrt{\pi n}}$$

همانطور که می‌دانیم، وضعیت i در صورتی بازگشت‌پذیر خواهد بود که $\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^{(2n)}=\infty$ باشد. برای بررسی برگشت‌پذیری وضعیت i در مدل قدم زدن تصادفی در تعداد مراحل زوج دو حالت $P=\frac{1}{2}$ و $P\neq\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2}$ -

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(2n)} = \frac{\left(4\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})\right)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\left(4\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})\right)^{4}}{\sqrt{4\pi}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} = \infty$$

بدین ترتیب، وضعیت i در مدل قدم زدن تصادفی در تعداد حرکات زوج در صورتی که $P=\frac{1}{2}$ باشد برگشت پذیر می باشد.

- $P\neq\frac{1}{2}$ (به طور مثال $P=\frac{1}{3}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(2n)} = \frac{\left(4\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})\right)^{2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\left(4\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})\right)^{4}}{\sqrt{4\pi}} + \cdots$$

$$= \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^{2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^{4}}{\sqrt{4\pi}} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^{2n}}{\sqrt{2n\pi}} < \infty$$

بنابراین، وضعیت i در مدل قدم زدن تصادفی در تعداد حرکات زوج در صورتی که $P\neq\frac{1}{2}$ باشد، برگشت پذیر نمی باشد.

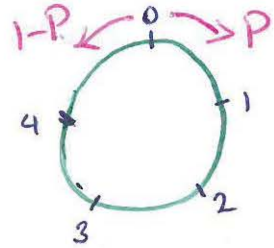
10- برای هر زنجیره مارکوف یکپارچه و غیر پریودیک با $M+1$ وضعیت داریم:

$$\begin{cases} (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M)P = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_M) \\ \pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_M = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20} + \cdots + \pi_M P_{M0} = \pi_0 \\ \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \cdots + \pi_M P_{M1} = \pi_1 \\ \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \cdots + \pi_M P_{M2} = \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_0 P_{0M} + \pi_1 P_{1M} + \pi_2 P_{2M} + \cdots + \pi_M P_{MM} = \pi_M \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_M = 1 \end{cases}$$

$$\bar{\pi}_j = \sum_{i=0}^{M} \bar{\pi}_i P_{ij} \quad , \quad \sum_{j=0}^{M} \bar{\pi}_j = 1 \quad \Bigg\} \quad \bar{\pi}_j = \frac{1}{M+1}$$

11- اگر یک ذره با احتمال P یک حرکت رو به جلو و با احتمال $(1-P)$ یک حرکت رو به عقب بر روی یک دایره انجام بدهد، نحوه حرکت ذره بر روی این دایره به صورت زیر خواهد بود:



الف) اگر X_n نشان دهنده وضعیت ذره روی دایره در n امین مرحله باشد، ماتریس احتمال انتقال وضعیت این زنجیره مارکوف برابر خواهد بود با:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 & 1-P \\ 1-P & 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 1-P & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1-P & 0 & P \\ P & 0 & 0 & 1-P & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ب) با توجه به این که زنجیره مارکوف فوق دو استوکستیک مضاعف می باشد، پس احتمالات حدی با توجه به سؤال 10 به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_4 = \frac{1}{\text{تعداد وضعیت‌ها}} = \frac{1}{5}$$

12- اگر Y_n نمایش مجموع n عدد بدست آمده از n پرتاب مستقل باشد، X_n $\longleftrightarrow$ باقیمانده تقسیم تعداد Y_n بر عدد 13 می باشد. ماتریس انتقال وضعیت برای X_n به صورت زیر تعریف می شود:

$$
\begin{array}{c}
0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\
1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\
1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\
1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\
1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6\\
1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6\\
1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

به منظور فهم ماتریس انتقال بالا ۶ وضعیتی که باقیمانده تقسیم Y_n (که اولین عدد 33) بر عدد 13 برابر 7 گشته است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این حالت اگر تاس پرتاب شده عدد 6 را نشان بدهد باقیمانده تقسیم Y_n (که تبدیل به عدد 39 شده است) بر عدد 13 برابر صفر می‌گردد. به همین منوال اگر تاس پرتاب شده اعداد 1 تا 5 را نشان بدهد باقیمانده مورد بحث می‌تواند به 8، 9، 10، 11 و 12 افزایش پیدا کند. همانطور که می‌دانیم احتمال اینکه Y_n مضربی از عدد 13 باشد دقیقاً معادل حالتی است که تقسیم Y_n بر عدد 13 دارای باقیمانده صفر باشد. با توجه به استوکستیک مضاعف بودن ماتریس انتقال بالا احتمال صفر بودن باقیمانده تقسیم Y_n بر عدد 13 برابر است با:

$$\pi_0 = \frac{1}{\text{تعداد کل وضعیت‌ها}} = \frac{1}{13}$$

$$\begin{cases} (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3, \bar{\pi}_4) \cdot P = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3, \bar{\pi}_4) \\ \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + \bar{\pi}_3 + \bar{\pi}_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{9}\bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_1 + \frac{4}{9}\bar{\pi}_2 + \frac{4}{9}\bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_2 \\ \frac{4}{9}\bar{\pi}_2 + \frac{4}{9}\bar{\pi}_3 + \bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_3 \\ \frac{1}{9}\bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_4 \\ \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + \bar{\pi}_3 + \bar{\pi}_4 = 1 \end{cases}$$

از حل معادلات بالا احتمالات حدی بصورت زیر بدست می آیند:

$$\bar{\pi}_1 = \frac{1}{20} \qquad \bar{\pi}_2 = \frac{9}{20} \qquad \bar{\pi}_3 = \frac{9}{20} \qquad \bar{\pi}_4 = \frac{1}{20}$$

۱۴- همانطور که ذکر شده است، این سازمان دارای 3 سمت مختلف می باشد که ماتریس انتقال آن بصورت زیر می باشد:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

به منظور محاسبه ی درصد کارمندان مشغول در هر سمت می بایست احتمالات حدی این زنجیره مارکوف را حساب کنیم. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3) \cdot P = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \bar{\pi}_3) \\ \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + \bar{\pi}_3 = 1 \end{cases}$$

$\Leftarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.7\,\bar{\pi}_1 + 0.2\,\bar{\pi}_2 + 0.1\,\bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_1 \\ 0.2\,\bar{\pi}_1 + 0.6\,\bar{\pi}_2 + 0.4\,\bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_2 \\ 0.1\,\bar{\pi}_1 + 0.2\,\bar{\pi}_2 + 0.5\,\bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_3 \\ \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + \bar{\pi}_3 = 1 \end{cases}$$

از حل معادلات بالا، احتمالات حدی به صورت زیر بدست می آیند:

$$\bar{\pi}_1 = 0.353 \qquad \bar{\pi}_2 = 0.412 \qquad \bar{\pi}_3 = 0.235$$

در نتیجه می توان گفت به ترتیب 35 درصد، 41 درصد و 23 درصد از N کارمند این سازمان در پست های 1، 2 و 3 مشغول به کار هستند.

15- الف) با توجه به اینکه زنجیره مارکوف بسته است (یعنی تمام وضعیت ها با یکدیگر در ارتباط اند) و محدود بودن تعداد وضعیت های آن می توان نتیجه گرفت که تمامی وضعیت های این زنجیره مارکوف برگشت پذیر هستند؛ بدین ترتیب، احتمال اینکه از وضعیت i شروع کرده و در نهایت به وضعیت j برسیم برابر 1 می باشد.

ب) اگر x_i معادل احتمال رسیدن به وضعیت N قبل از اینکه وارد وضعیت 0 شویم مشروط بر شروع از وضعیت i باشد، مجموعه معادلات خطی که x_i را به صورت یکتا برآورد می کند برابر خواهد بود با:

$$X_i = \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij} X_j + P_{iN} \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

$$X_0 = 0 \qquad X_N = 1$$

ج) برای اثبات این مسئله برعکس عمل می کنیم؛ یعنی $x_i = \frac{i}{N}$ در نظر می گیریم و اثبات می کنیم در این شرایط $\sum_j jP_{ij} = i$ خواهد بود؛ پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} i/N &= X_i \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij} X_j + P_{iN} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} P_{ij}\, j/N + P_{iN} \\ &= 1/N \sum_{j=0}^{N} jP_{ij} \implies i = \sum_{j=0}^{N} jP_{ij} \end{aligned}$$

تعریف گردد، ماتریس انتقال وضعیت این زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} (0,r) & (1,r-1) & (2,r-2) & \cdots & (r,0) \end{matrix} \\
\begin{matrix} (0,r) \\ (1,r-1) \\ (2,r-2) \\ \vdots \\ (r,0) \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
P & 1-P & 0 & \cdots & 0 \\
0 & P & 1-P & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1-P
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ب) بدین منظور، با نشان دادن اینکه معادلات ارائه شده در $\bar{\pi}_j=\sum_i \bar{\pi}_i P_{ij}$ صدق می‌کنند. معادلات ارائه شده به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\bar{\pi}_r = \bar{\pi}_0 + \bar{\pi}_1 (P)$$

$$\bar{\pi}_j = \bar{\pi}_{r-j} (1-P) + \bar{\pi}_{r-j+1} (P) \quad \forall \; j=1,2,\dots,r-1$$

$$\bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_r (1-P)$$

به راحتی با اثبات این می‌رسد که معادلات بالا در $\bar{\pi}_j=\sum_i \bar{\pi}_j P_{ij}$ صدق می‌کنند.

ج) اگر هیچ چتری در مکانی که این شخص حضور دارد نباشد، این شخص خیس می‌شود. بدین ترتیب درصد زمان‌هایی که شخص خیس می‌شود به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P\bar{\pi}_0 = \frac{Pq}{r+q}$$

د) اگر $r=3$ باشد، برای محاسبه مقدار P که احتمال خیس شدن فرد را ماکزیمم کند، می‌بایست از تابع احتمال حالتی که هیچ چتری در مکان حال حاضر فرد وجود ندارد، مشتق گرفته شود:

$$\frac{d}{dP}\left(P\bar{\pi}_0\right) = \frac{d}{dP}\left(\frac{P(1-P)}{3+(1-P)}\right)$$

$$= \frac{d}{dP}\left(P(1-P) \right)$$

$$= \frac{(4-P)(1-2P)+P(1-P)}{(4-P)^2}$$

$$= \frac{P^2-8P+4}{(4-P)^2}$$

در این مرحله برای یافتن مقدار P که احتمال خیس شدن فرد را ماکزیمم می‌کند باید مشتق را مساوی صفر قرار داد،

به عبارت دیگر باید صورت مشتق مساوی صفر قرار بگیرد ($P^2-8P+4=0$)؛ بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$P = \frac{8-\sqrt{48}}{2} = 0.55$$

نتیجتاً در شرایطی که $r=3$ است، احتمال خیس شدن شخص با $P=0.55$ ماکزیمم می‌گردد.

17- بدیهی است که اگر وضعیت 0 یا N باشد، ادامه پیدا نخواهد کرد؛ بدین ترتیب، $M_0 = M_N = 0$ خواهند بود.

اگر مسئله در

اگر مسئله در وضعیتی غیر از 0 و N باشد، با احتمال P به وضعیت $i+1$ و با احتمال $1-P$ به وضعیت $i-1$ می‌رود. پس میانگین تعداد دفعاتی که بازی انجام می‌شود تا بازی به اتمام برسد مشروط بر این که از i واحد (دارایی قمارباز) شروع شود به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M_i = 1 + P M_{i+1} + (1-P) M_{i-1}$$

یک دور بازی که قمارباز انجام می‌دهد تا بتواند از i واحد به $i+1$ واحد یا $i-1$ واحد برسد.

18- از مسئله‌ی 17 داریم که:

$$M_i = 1 + P M_{i+1} + (1-P) M_{i-1} \qquad \text{I}$$

حال برای $P=1/2$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} M_{i+1} = (i+1)(N-i-1) \\ M_{i-1} = (i-1)(N-i+1) \end{cases} \qquad \text{II}$$

از جایگذاری عبارت II در I خواهیم داشت:

$$M_i = 1 + P(i+1)(N-i-1) + (1-P)(i-1)(N-i+1)$$

$$\xrightarrow{P=1/2} M_i = 1 + 1/2\,(i+1)(N-i-1) + (1-1/2)(i-1)(N-i+1)$$

$$= 1 + 1/2(iN - i^2 - i + N - i - 1) + 1/2(iN - i^2 + i - N + i - 1)$$

$$= 1 + iN - i^2 - 1$$

$$= iN - i \quad = i(N-i)$$

اما اگر $p \neq 1/2$ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} m_{i+1} = \dfrac{i+1}{q-p} - \dfrac{N}{q-p} \times \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{i+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N}} \\[2ex] m_{i-1} = \dfrac{i-1}{q-p} - \dfrac{N}{q-p} \times \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N}} \end{cases} \qquad \text{III}$$

از جایگذاری معادلات III در I خواهیم داشت:

$$M_i = 1 + p\left(\frac{i+1}{q-p} - \frac{N}{q-p} \times \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{i+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N}}\right) + q\left(\frac{i-1}{q-p} - \frac{N}{q-p} \times \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N}}\right)$$

به منظور ساده‌تر خلاصه سازی عبارات بالا، $p=1/3$ در نظر می‌گیریم $(q=2/3)$؛ پس خواهیم داشت:

$$M_i = 1 + 1/3\left(\frac{i+1}{2/3-1/3} - \frac{N}{2/3-1/3} \times \frac{1-\left(\frac{2/3}{1/3}\right)^{i+1}}{1-\left(\frac{2/3}{1/3}\right)^{N}}\right) + 2/3\left(\frac{i-1}{2/3-1/3} - \frac{N}{2/3-1/3} \times \frac{1-\left(\frac{2/3}{1/3}\right)^{i-1}}{1-\left(\frac{2/3}{1/3}\right)^{N}}\right)$$

$$= 1 + 1/3\left(\frac{i+1}{1/3} - \frac{N}{1/3} \times \frac{1-(2)^{i+1}}{1-(2)^{N}}\right) + 2/3\left(\frac{i-1}{1/3} - \frac{N}{1/3} \times \frac{1-(2)^{i-1}}{1-(2)^{N}}\right)$$

$$= 1 + (i+1) - \frac{N(1-2^{i+1})}{1-2^N} + 2(i-1) - \frac{2N(1-2^{i})}{1-2^N}$$

$$= 3i - \frac{N\left[(1-2^{i+1}) + 2(1-2^{i-1})\right]}{1-2^N}$$

$$= 3i - \frac{N\left[1-2\times 2^i + 2 - 2\times 1/2 \times 2^i\right]}{1-2^N}$$

$$= 3i - \frac{N\left[3 - 3\times 2^i\right]}{1-2^N}$$

$$= 3i - \frac{3N\left[1-2^i\right]}{1-2^N}$$

$$= \frac{i}{1/3} - \frac{N}{1/3} \times \frac{1-\left(\frac{2/3}{1/3}\right)^i}{1-\left(\frac{2/3}{1/3}\right)^N}$$

با توجه به اینکه مقادیر p و q به ترتیب برابر $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ در نظر گرفته شده اند عبارت بالا را می توان معادل عبارت زیر در نظر گرفت:

$$M_i = \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \times \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

19- همانطور که می دانیم اجزای فرآیند انشعاب بصورت مستقل از یکدیگر تولید مثل می کنند؛ اگر در یک فرآیند انشعاب داشته باشیم $X_0=1$ آنگاه میانگین تعداد افرادی که در این جمعیت وجود دارند برابر $\frac{1}{1-\mu}$ می باشد. با توجه به اینکه اجزا در یک فرآیند انشعاب مستقل از یکدیگر تولید مثل می کنند پس اگر $X_0=n$ باشد میانگین تعداد افراد جمعیت برابر $\frac{n}{1-\mu}$ خواهد. برای اثبات ریاضی این مهم نیز خواهیم داشت:

$$E\left[\sum_{k=0}^{\infty} X_k \mid X_0=n\right] = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[X_k \mid X_0=n\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} n\mu^k$$

$$= n\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k = \frac{n}{1-\mu}$$

20- اگر در یک فرآیند انشعاب $X_0=1$ و $\mu>1$ باشد آنگاه مقدار خواسته شده با استفاده از استقرای ریاضی به صورت زیر به اثبات می رسد:

$\pi \geq P\{X_0=0\}$ پایه استقرا

$\pi \geq P\{X_{n-1}=0\}$ فرض استقرا

حکم این استقرا به صورت زیر تعریف می شود:

$\pi \geq P\{X_n=0\}$

به منظور اثبات استقرای بالا باید حکم آن را اثبات کنیم؛ همانطور که در صورت سوال ذکر شده است پس خواهیم داشت:

$P\{X_n=0\} = \sum (P\{X_{n-1}=0\})^j P_j$

$$P\{X_n=0\} = \sum_{j=0} (P\{X_{n-1}=0\})^j P_j \leq \sum_j \bar{\pi}^j P_j$$

با توجه به این که $\bar{\pi} = \sum \bar{\pi}^j P_j$ است، پس خواهیم داشت:

$$\bar{\pi} \geq P\{X_n=0\}$$

پس حکم استقرا در خواسته‌ی صورت سؤال است، به اثبات رسید.

21 - الف) با توجه به این که $P_0=\frac{1}{4}$ و $P_2=\frac{3}{4}$ است، پس $P_1=0$ خواهد بود. بدین ترتیب μ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\mu = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2$$

$$= 0(1/4)+1(0)+2(2/3) = 4/3 > 1$$

بدین ترتیب π_0 به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{3} \pi_0^j P_j$$

$$\Rightarrow \pi_0 = 1/4(\pi_0)^0 + 0(\pi_0)^1 + 3/4(\pi_0)^2$$

$$\Rightarrow \pi_0 = 3/4(\pi_0)^2 + 1/4$$

$$\Rightarrow 3/4(\pi_0)^2 - \pi_0 + 1/4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1 - 4 \times 3/4 \times 1/4 = 1/4$$

$$\pi_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm 1/2}{6/4} = \begin{cases} 1 \\ 0.33 \end{cases}$$

بنابراین این خانواده شجره با احتمال 0.33 منقرض می‌شود.

ب) اگر $P_0=1/4$ ، $P_1=1/2$ و $P_2=1/4$ باشد، μ برابر خواهد بود با:

$$\mu = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2$$

$$= 0(1/4) + 1(1/2) + 2(1/4) = 1$$

ج) اگر $P_0 = 1/6$ ، $P_1 = 1/2$ و $P_2 = 1/3$ باشد، μ برابر خواهد بود با:

$$\mu = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2$$

$$= 0(1/6) + 1(1/2) + 2(1/3) = 7/6 > 1$$

بنابراین π_0 این فرآیند به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\pi_0 = \sum \pi_0^j P_j$$

$$\Rightarrow \pi_0 = 1/6(\pi_0)^0 + 1/2(\pi_0)^1 + 1/3(\pi_0)^2$$

$$\Rightarrow 1/3(\pi_0)^2 - 1/3(\pi_0) + 1/6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1/4 - 4 \times 1/3 \times 1/6 = 1/36$$

$$\pi_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{+1/2 \pm 1/6}{2/3} = \begin{cases} 1 \\ 0.5 \end{cases}$$

این فرآیند انشعاب با احتمال 50 درصد منقرض می‌شود.

فصل چهارم

حل المسایل ایروانی

۱- اگر $N_A(t)$ بیانگر تعداد ارگانیسم های باشد که در وضعیت A هستند و $N_B(t)$ بیانگر تعداد ارگانیسم های باشد که در وضعیت B باشند، $\{N_A(t), N_B(t)\}$ بیانگر وضعیت های این زنجیره مارکوف پیوسته می باشد. پارامترهای این زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می شوند:

$$P_{\{n,m\};\{n-1,m+1\}} = \frac{\alpha n}{\alpha n + \beta m}$$

$$P_{\{n,m\};\{n+2,m-1\}} = \frac{\beta m}{\alpha n + \beta m}$$

$$v_{\{n,m\}} = \alpha n + \beta m$$

به طور مثال، احتمال انتقال از وضعیت $\{n,m\}$ به وضعیت $\{n-1,m+1\}$ معادل احتمال حالتی است که یک ارگانیسم از نوع A تبدیل به یک ارگانیسم از نوع B شود. احتمال انتقال از وضعیت $\{n,m\}$ به وضعیت $\{n-1,m+1\}$ معادل $\frac{\alpha n}{\alpha n + \beta m}$ می باشد.

2- برای این که بتوان زنجیره مارکوف تعریف شده را به صورت فرایند تولد و مرگ تجزیه و تحلیل کرد، اطلاعات بیشتری مورد نیاز می باشد؛ به طور مثال، باید مشخص شود کدام ماشین در حال کار می باشد. اما امکان بررسی زنجیره مارکوف فوق به صورت کلی وجود دارد. بدین منظور، وضعیت های زیر را تعریف می کنیم:

a: هر دو ماشین در حال کار کردن هستند.

1: ماشین 1 در حال کار کردن است و ماشین 2 خراب است.

2: ماشین 1 خراب است و ماشین 2 در حال کار است.

0_1: هر دو ماشین خراب هستند و ماشین 1 در حال سرویس است.

0_2: هر دو ماشین خراب هستند و ماشین 2 در حال سرویس است.

با توجه به وضعیت های تعیین شده، پارامترهای این زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می شوند:

$$P_{a,1} = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} = 1 - P_{a,2}, \qquad P_{1,b} = \frac{\mu}{\mu+\mu_1} = 1 - P_{1,0_2}$$

$$P_{2,b} = \frac{\mu}{\mu+\mu_2} = 1 - P_{2;0_1}, \qquad P_{0_1,1} = P_{0_2,2} = 1$$

از طرف دیگر، نرخ انتقال از وضعیت های مختلف برای این زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$v_a = \mu_1+\mu_2 ,\quad v_1 = \mu_1+\mu ,\quad v_2 = \mu_2+\mu ,\quad v_{0_1} = v_{0_2} = \mu$$

3- اگر $N(t)$ بیانگر تعداد مشتری‌ها در ایستگاه در زمان t باشد، آنگاه فرآیند تولد و مرگ مذکور دارای وضعیت $\{N(t)\}$ می‌باشد؛ نرخ تولد و مرگ این فرآیند به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\lambda_n = \lambda \alpha_n$$

$$\mu_n = \mu$$

4- به منظور تعیین ماتریس آهنگ انتقال زنجیره مارکوف مفروض، وضعیت‌های مختلف این زنجیره به صورت زیر تعریف می‌شوند:

0: اگر هر دو ماشین در حال کار باشند

1: اگر تنها یک ماشین در حال کار باشد

2: اگر هر دو ماشین خراب باشند

ماتریس آهنگ انتقال این زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{array}$$

در نهایت معادلات چاپمن کولموگروف این سیستم به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t).Q$$ معادله رفت کولموگروف

$$\frac{dP(t)}{dt} = Q.P(t)$$ معادله برگشت کولموگروف

به طور مثال برای معادلات رفت کولموگروف خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} P'_{00}(t) & P'_{01}(t) & P'_{02}(t) \\ P'_{10}(t) & P'_{11}(t) & P'_{12}(t) \\ P'_{20}(t) & P'_{21}(t) & P'_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{20}(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

5- اگر $\{I_1(t), I_2(t)\}$ بیانگر وضعیت های زنجیره مارکوف پیوسته معرفی شده، شروط برابر کنید

$$I_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر ماشین } i \text{ ام در زمان } t \text{ کار بکند} \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بدین ترتیب،

وضعیت های این زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می شوند:

$[0,0]$: هر دو ماشین سالم هستند.

$[1,0]$: ماشین 1 خراب است.

$[0,1]$: ماشین 2 خراب است.

$[1,1]$: هر دو ماشین خراب هستند.

با فرض مستقل بودن زمان کارکرد دو ماشین، احتمال انتقال وضعیت ماشین اول از وضعیت i به k و انتقال وضعیت ماشین دوم از وضعیت j به l به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$P_{(i,j)(k,l)}(t) = P_{(i,k)}(t)\, Q_{(j,l)}(t)$$

در حالی که $P_{(i,k)}(t)$ معادل احتمال انتقال وضعیت ماشین اول در زمان t از وضعیت i به وضعیت k می باشد و $Q_{(j,l)}(t)$ نیز معادل احتمال انتقال وضعیت ماشین دوم در زمان t از وضعیت j به وضعیت l می باشد.

از طرفی می دانیم که:

$$P_{00}(t) = [\lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t} + \mu_1] / (\lambda_1+\mu_1)$$

$$P_{10}(t) = [\mu_1 - \mu_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}] / (\lambda_1+\mu_1)$$

$$P_{01}(t) = [\lambda_1 - \lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}] / (\lambda_1+\mu_1)$$

$$P_{11}(t) = [\mu_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t} + \lambda_1] / (\lambda_1+\mu_1)$$

با توجه به این که استدلال بالا برای ماشین دوم نیز صدق می کند (فقط باید به جای (λ_1,μ_1)، (λ_2,μ_2) قرار دهیم)، به طور مثال برای $P_{(0,0)(0,0)}(t)$ خواهیم داشت:

$$P_{(0,0)(0,0)}(t) = P_{(0,0)}(t)\, Q_{(0,0)}(t)$$

$$= \frac{[\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t} + \mu_1]}{\lambda_1+\mu_1} \times \frac{[\lambda_2 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t} + \mu_2]}{\lambda_2+\mu_2}$$

به منظور بررسی صدق کردن احتمالات صدق تعریف شده در معادلات کولموگروف، معادلات رفت و برگشت را برای وضعیت $\{(0,0)(0,0)\}$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای معادلات برگشت خواهیم داشت:

$$P'_{(0,0)(0,0)}(t) = (\lambda_1+\lambda_2)\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}P_{(0,1)(0,0)}(t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}P_{(1,0)(0,0)}(t) - P_{(0,0)(0,0)}(t)\right]$$

$$= \lambda_2 P_{(0,1)(0,0)}(t) + \lambda_1 P_{(1,0)(0,0)}(t) - (\lambda_1+\lambda_2)P_{(0,0)(0,0)}(t)$$

برای اثبات تساوی بین سمت راست و چپ معادله بالا، سمت راست آن را از (۲.۵.۵) به صورت زیر می‌نویسیم:

$$= \lambda_2\left(\frac{[\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}+\mu_1]}{\lambda_1+\mu_1} \times \frac{[\mu_2-\mu_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}]}{\lambda_2+\mu_2}\right)$$

$$+ \lambda_1\left(\frac{[\mu_1-\mu_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}]}{\lambda_1+\mu_1} \times \frac{[\lambda_2 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}+\mu_2]}{\lambda_2+\mu_2}\right)$$

$$-(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{[\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}+\mu_1]}{\lambda_1+\mu_1} \times \frac{[\lambda_2 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}+\mu_2]}{\lambda_2+\mu_2}\right)$$

$$= \frac{\lambda_2[\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}+\mu_1]}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)} \times [\mu_2-\mu_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t} - \lambda_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t} - \mu_2]$$

$$+ \frac{\lambda_1[\lambda_2 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}+\mu_2]}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)} \times [\mu_1-\mu_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t} - \mu_1 - \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}]$$

$$= \left[-\lambda_2 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}\right]\left[\frac{\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}+\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}\right] + \left[-\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}\right]\left[\frac{\lambda_2 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}+\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}\right]$$

$$= Q'_{00}(t)P_{00}(t) + P'_{00}(t)Q_{00}(t)$$

$$= \left(P_{00}(t)Q_{00}(t)\right)' = \left(P_{(0,0)(0,0)}(t)\right)'$$

بدین ترتیب به اثبات رسید که احتمالات صدق تعریف شده در معادلات برگشت کولموگروف صدق می‌کند. برای معادلات رفت نیز خواهیم داشت:

$\Longleftarrow$

$$P'_{(0,0)(0,0)}(t)=\mu_2 P_{(0,0)(0,1)}(t)+\mu_1 P_{(0,0)(1,0)}(t)-(\lambda_1+\lambda_2)P_{(0,0)(0,0)}(t)$$

برای اثبات مساوی بودن سمت راست و چپ معادله‌ی بالا، سمت راست آن را (r.h.s) به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$r.h.s=\mu_2\left(\frac{\left[\lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}+\mu_1\right]}{\lambda_1+\mu_1}\times\frac{\left[\lambda_2-\lambda_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}\right]}{\lambda_2+\mu_2}\right)$$

$$+\mu_1\left(\frac{\left[\lambda_1-\lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}\right]}{\lambda_1+\mu_1}\times\frac{\left[\lambda_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}+\mu_2\right]}{\lambda_2+\mu_2}\right)$$

$$-(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{\left[\lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}+\mu_1\right]}{\lambda_1+\mu_1}\times\frac{\left[\lambda_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}+\mu_2\right]}{\lambda_1+\mu_1}\right)$$

$$=\frac{\left[\lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}+\mu_1\right]}{\lambda_1+\mu_1}\times\left(\frac{\mu_2\lambda_2-\lambda_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}-\lambda_2\left[\lambda_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}+\mu_2\right]}{\lambda_2+\mu_2}\right)$$

$$+\frac{\left[\lambda_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}+\mu_2\right]}{\lambda_2+\mu_2}\times\left(\frac{\mu_1\left[\lambda_1-\lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}\right]-\lambda_1\left[\lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}+\mu_1\right]}{\lambda_1+\mu_1}\right)$$

$$=P_{00}(t)\left(-\lambda_2 e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}\right)+Q_{00}(t)\left(-\lambda_1 e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}\right)$$

$$=P_{00}(t)Q'_{00}(t)+Q_{00}(t)+P'_{00}(t)=\left(P_{(0,0)(0,0)}(t)\right)'$$

به همین ترتیب می‌توان صدق کردن احتمالات گذرای ارائه شده در معادلات کولموگروف در وضعیت های دیگر را نیز بررسی کرد.

6- اگر تعداد اجزا در لحظه‌ی t بیانگر وضعیت های فرآیند تولد و مرگ موجود باشد، نرخ تولد و مرگ برابر خواهد بود با:

الف)

$\lambda_n=n\lambda+\theta \qquad n<N$

$\lambda_n=n\lambda \qquad n\geq N$

$\mu_n=n\mu$

ب) به منظور تعیین درصد اوقاتی که اجزا اجازه ی مهاجرت ندارند ، $\bar{\pi}_i$ را احتمال طولانی مدت که سیستم در وضعیت i باشد تعریف می کنیم. بنابراین ، می بایست مقدار $\sum_{i=3}^{N} \bar{\pi}_i$ تعیین گردد.
احتمالات حدی این زنجیره مارکوف محاسبه شده و به صورت زیر تعیین شده اند:

$$\bar{\pi}_1 = \theta/\mu \, \bar{\pi}_0$$

$$\bar{\pi}_2 = \frac{\theta(\lambda+\theta)}{2\mu^2}$$

$$\bar{\pi}_3 = \frac{\theta(\lambda+\theta)(2\lambda+\theta)}{6\mu^3} \bar{\pi}_0$$

$$\bar{\pi}_k = \frac{(k-1)\lambda}{k\mu} \bar{\pi}_{k-1} \quad ; k = 4, 5, \dots$$

برای $k \geq 4$ خواهیم داشت:

$$\bar{\pi}_k = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(3)}{k(k-1)\cdots(4)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-3}$$

$$= \frac{3}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-3} \bar{\pi}_3$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \bar{\pi}_k = 3\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3 \bar{\pi}_3 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

از طرفی می دانیم که اگر $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ باشد:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \log\left(\frac{1}{1-\lambda/\mu}\right)$$

$$= \log\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \bar{\pi}_k = 3\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3 \bar{\pi}_3 \left[\log\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right) - \frac{\lambda}{\mu} - 1/2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right]$$

$$= 3\left(\mu/\lambda\right)^3 \left[\log\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right) - \lambda/\mu - 1/2\left(\lambda/\mu\right)^2\right] \frac{\theta(\lambda+\theta)(2\lambda+\theta)}{6\mu^3} \bar{\pi}_0$$

با توجه به اینکه $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{\pi}_i = 1$ است ، خواهیم داشت:

$$\pi_0 = \left[1 + \theta/\mu + \frac{\theta(\lambda+\theta)}{2\mu^2} + \frac{1}{2\lambda^3}\theta(\lambda+\theta)(2\lambda+\theta) \times \left[\log\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right) - \frac{\lambda}{\mu} - 1/2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right]\right]^{-1}$$

در نهایت احتمال خواسته شده در صورت سوال برابر خواهد بود با:

$$\sum_{K=3}^{\infty} \pi_K = \frac{\left[\left(1/2\lambda^3\right)\left(\log\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right) - \frac{\lambda}{\mu} - 1/2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right) \times \theta(\lambda+\theta)(2\lambda+\theta)\right]}{\left[1 + \theta/\mu + \frac{\theta(\lambda+\theta)}{2\mu^2} + \frac{\theta(\lambda+\theta)(2\lambda+\theta)}{2\lambda^3} \times \left(\log\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right) - \lambda/\mu - 1/2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right)\right]}$$

7- اگر تعداد مشتری های حاضر در آرایشگاه بیانگر وضعیت زنجیره مارکوف مورد نظر باشد، با یک فرآیند تولد و مرگ روبرو خواهیم شد که دارای نرخ تولد $\lambda_0 = \lambda_1 = 3$ و نرخ مرگ $4 = \mu_1 = \mu_2$ است. از آنجایی که در فرآیند تولد و مرگ احتمالات حدی برابر $\pi_i = \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\pi_{i-1} \quad \forall i \geq 1$ است، پس خواهیم داشت:

$$\pi_1 = 3/4\ \pi_0$$

$$\pi_2 = 3/4\ \pi_1 = \left(3/4\right)^2 \pi_0$$

با توجه به اینکه $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\pi_0 = \left(1 + 3/4 + \left(3/4\right)^2\right)^{-1} = \frac{16}{37}$$

الف) متوسط تعداد مشتری ها داخل آرایشگاه به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\text{تعداد متوسط مشتری های داخل آرایشگاه} = 0(\pi_0) + 1(\pi_1) + 2(\pi_2)$$

$$= \left(3/4 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)\pi_0$$

$$= \frac{30}{16} \times \frac{16}{37} = \frac{30}{37}$$

ب) درصد از مشتریانی که به آرایشگاه مراجعه می کنند ولی نمی توانند وارد آرایشگاه شوند معادل درصد مشتریانی است که به آرایشگاه مراجعه می کنند اما 2 مشتری در آرایشگاه وجود دارد (π_2). بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\text{درصد مشتریانی که نمی توانند وارد آرایشگاه شوند} = \pi_2 = 9/16$$

ج) اگر آرایشگاه سرعت کار خود را دو برابر کند (یعنی $\mu=8$) ، میزان افزایش $\longleftrightarrow$ سرعت کارش ؟
صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\pi_0 = \left(1 + 3/8 + \left(\frac{3}{8}\right)^2\right)^{-1} = \frac{64}{97}$$

درصد از مشتریانی که وارد آرایشگاه می شوند $= 1 - \pi_2$

$$= 1 - \left(\frac{\lambda_1}{\mu_2}\right)^2 \pi_0$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \frac{64}{97} = \frac{88}{97}$$

با توجه به اینکه $\frac{28}{37}$ از مشتریان مراجعه کننده به آرایشگاه در حالت اول وارد مغازه می شوند ($1-\pi_2 = 1 - \frac{9}{16}\,\frac{16}{37} = \frac{28}{37}$) خواهیم داشت:

$$\text{میزان افزایش سرعت کار آرایشگاه} = \lambda\left(\frac{88}{97}\right) - \lambda\left(\frac{28}{37}\right)$$

$$= 3\left(\frac{88}{97} - \frac{28}{37}\right) = 0.45$$

بدین ترتیب ، 0.45 مشتری در هر ساعت با افزایش سرعت کار این آرایشگاه بیشتر سرویس دریافت می کنند.

8 - اگر تعداد اتومبیل های موجود در این ایستگاه سرویس دهنده به وضعیت های زنجیره مارکوف فوق باشد، می توان آن را همچون یک فرآیند تولد و مرگ که دارای نرخ تولد $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=20$ و نرخ مرگ $\mu_1=\mu_2=12$ است مورد بررسی قرار داد. بدین ترتیب احتمالات حدی با استفاده از $\pi_i = \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\pi_{i-1} \;\; \forall i \geq 1$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\pi_1 = 5/3\,\pi_0$$

$$\pi_2 = 5/3\,\pi_1 = \left(5/3\right)^2 \pi_0$$

$$\pi_3 = 5/3\,\pi_2 = \left(5/3\right)^3 \pi_0$$

با توجه به اینکه $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ است ، خواهیم داشت،

$$\pi_0 = \left(1 + 5/3 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{-1} = \frac{27}{272}$$

الف) درصد از زمانی که سرویس دهنده مشغول سرویس دهی است معادل حالتی است که مشتری درون ایستگاه پمپ بنزین حضور داشته باشد ، بدین ترتیب ، درصدی از زمان که سرویس دهنده مشغول سرویس دهی است به صورت زیر محاسبه می گردد

درصدی از زمان که سرویس دهنده مشغول سرویس دهی می‌باشد: $= 1-\bar{\pi}_0 = \frac{245}{272}$

ب) زمانی مشتریان از ورود به پمپ بنزین در این مسأله منصرف می‌شوند که 3 مشتری در ایستگاه حضور داشته باشند؛ پس درصدی از مشتریان که از ورود به ایستگاه منصرف می‌شوند به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

درصدی از مشتریان که از ورود به ایستگاه پمپ بنزین منصرف می‌شوند $= \bar{\pi}_3$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^3 \bar{\pi}_0 = \frac{125}{272}$$

6- اگرچه این زنجیره را می‌توان در قالب فرآیند تولد و مرگ نیز بررسی کرد، اما این سوال را به روش موجود در کتاب حل می‌کنیم.

الف) وضعیت‌های این زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می‌شود:

0: هیچ مشتری در این سیستم صف حضور نداشته باشد.

1: تنها یک مشتری در این سیستم صف حضور داشته باشد.

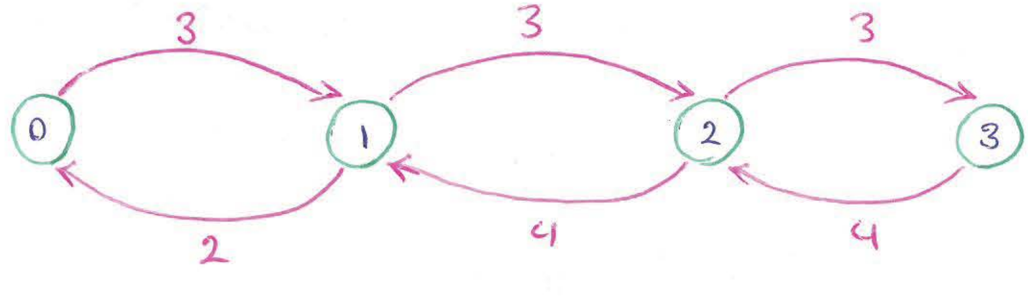
2: دو مشتری در این سیستم صف حضور داشته باشند.

3: سه مشتری در این سیستم صف حضور داشته باشند.

از طرفی ماتریس نرخ انتقال این زنجیره مارکوف برابر خواهد بود با:

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

بدین ترتیب، دیاگرام نرخ انتقال این زنجیره مارکوف به صورت زیر رسم می‌شود:



معادلات تعادل این زنجیره به صورت زیر نوشته می‌شوند:

وضعیت	خروجی	=	ورودی
0	$3\pi_0$	=	$2\pi_1$
1	$5\pi_1$	=	$3\pi_0+4\pi_2$
2	$7\pi_2$	=	$3\pi_1+4\pi_3$
3	$4\pi_3$	=	$3\pi_2$

با توجه به اینکه $\sum_{i=0}^{1}\pi_i=1$ است، پس خواهیم داشت:

$\pi_0=0.2237,\quad \pi_1=0.3356,\quad \pi_2=0.2517,\quad \pi_3=0.1888$

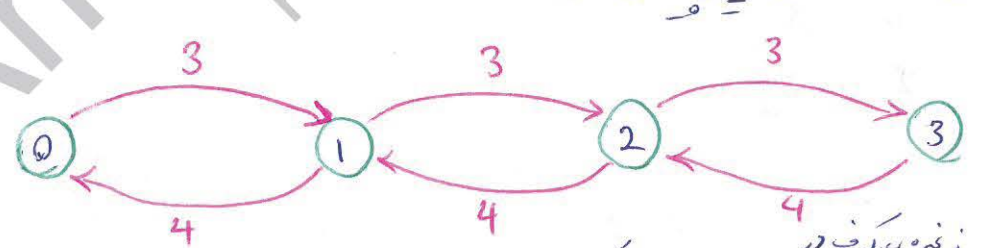
در نهایت، درصد مشتریانی که وارد سیستم صف می‌شوند معادل حالتی است که 3 مشتری درون آن حضور نداشته باشند، پس خواهیم داشت:

درصد مشتریانی که وارد سیستم صف می‌شوند $=1-\pi_3=0.812$

ب) اگر این سیستم با یک خدمت دهنده با سرعت سرویس‌دهی دو برابر خدمت دهندگان قبلی است جایگزین کنیم، ماتریس آهنگ انتقال به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$Q=\begin{array}{c} \\ 0\\ 1\\ 2\\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\\ \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0\\ 4 & -7 & 3 & 0\\ 0 & 4 & -7 & 3\\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}\end{array}$$

دیاگرام آهنگ انتقال نیز به صورت زیر تغییر پیدا می‌کند:



در نهایت معادلات تعادل را برای حالت مورد نظر (زنجیره مارکوف در بالا) تشکیل داده و احتمالات حدی را محاسبه می‌کنیم:

$\pi_0=0.3168,\quad \pi_1=0.2376,\quad \pi_2=0.1782,\quad \pi_3=0.2673$

درصد مشتریانی که در این حالت وارد سیستم صف می‌شوند برابر خواهد بود با:

درصد مشتریانی که وارد سیستم صف می‌شوند $=1-\pi_3=0.7327$

از مقایسه ی مقادیر قسمت الف و ب می توان نتیجه گیری کرد که زنجیره مارکوف فوق در حالت دو خدمت دهنده موثرتر کار می کرده.

۱۰- اگر تعداد شین های خراب مبین وضعیت های زنجیره مارکوف باشد می توان این زنجیره را هم چون یک فرآیند تولد و مرگ که دارای نرخ تولد $\lambda_0 = \frac{3}{10}$, $\lambda_1 = \frac{2}{10}$, $\lambda_2 = 1/10$ و نرخ مرگ $\mu_1 = 1/8$, $\mu_2 = 2/8$, $\mu_3 = \frac{2}{8}$ است مورد بررسی قرارداد. احتمالات حدی این فرآیند تولد و مرگ براساس $\bar{\lambda}_i = \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)^{i} \bar{\lambda}_{i-1}$ و i از ۱ تا ۳ به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{3/10}{1/8}\,\bar{\lambda}_0 = \frac{12}{5}\bar{\lambda}_0$$

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{2/10}{2/8}\,\bar{\lambda}_1 = \frac{48}{25}\bar{\lambda}_0$$

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{1/10}{2/8}\,\bar{\lambda}_2 = \frac{192}{250}\bar{\lambda}_0$$

با توجه به این که $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}_i = 1$ است، پس خواهیم داشت:

$$\bar{\lambda}_0 = \left(1 + \frac{12}{5} + \frac{48}{25} + \frac{192}{250}\right)^{-1} = \frac{250}{1522}$$

الف) متوسط تعداد شین های خراب برابر خواهد بود با:

$$\text{متوسط تعداد شین های خراب} = 0(\bar{\lambda}_0) + 1(\bar{\lambda}_1) + 2(\bar{\lambda}_2) + 3(\bar{\lambda}_3) = \frac{1068}{761}$$

ب) درصد اوقاتی که هر دو تعمیرکار مشغول به کار باشند معادل حالتی است که دو یا سه ماشین خراب شده باشند؛ بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\text{درصد اوقاتی که هر دو تعمیرکار مشغول به کارند} = \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 = \frac{336}{761}$$

۱۱- با فرض این که هر تاکسی تقاضای مسافر را سرویس می دهد، زنجیره مارکوف سوال مربوطه را می توان در قالب فرآیند تولد و مرگ با نرخ تولد $\lambda_n = 1$ و نرخ مرگ $\mu_n = 2$ مورد بررسی قرارداد. از طرفی با توجه به نمایی بودن نرخ سرویس دهی و ورود مشتری و همچنین تنها یک سرویس دهنده (تک سروره بودن)، می توان این فرآیند تولد و مرگ را در قالب سیستم صف M/M/1 مورد بررسی قرارداد (اطلاعات تکمیلی تر در فصول بعدی ارایه می شود). در نتیجه خواهیم داشت:

الف) با توجه به اینکه زنجیره مارکوف مورد بحث یک صف $M/M/1$ است، پس خواهیم داشت:

$$\text{متوسط تعداد تاکسی های منتظر} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$= \frac{1}{2-1} = 1$$

ب) هم چنین، درصد مشتریانی که به ایستگاه مراجعه می‌کنند و سوار تاکسی می‌شوند معادل احتمال این است که تعداد تاکسی‌های موجود در ایستگاه برابر صفر نگردد؛ با توجه به اینکه زنجیره مارکوف مورد بحث یک صف $M/M/1$ می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{درصد مشتریانی که سوار تاکسی می‌شوند} = 1-\pi_0$$

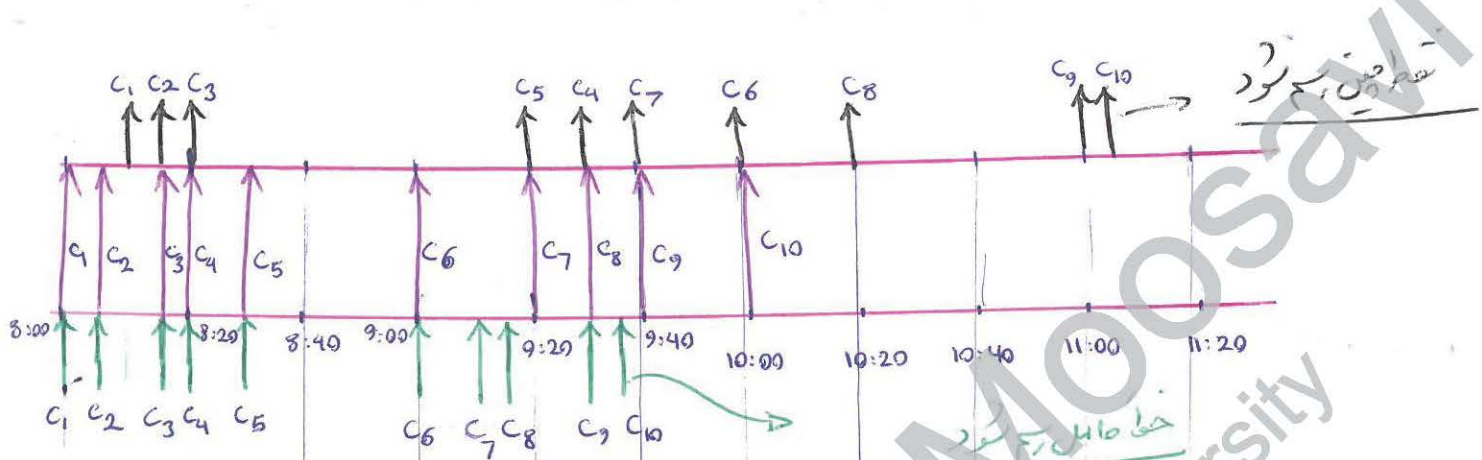
$$= 1-\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \lambda/\mu = 1/2$$

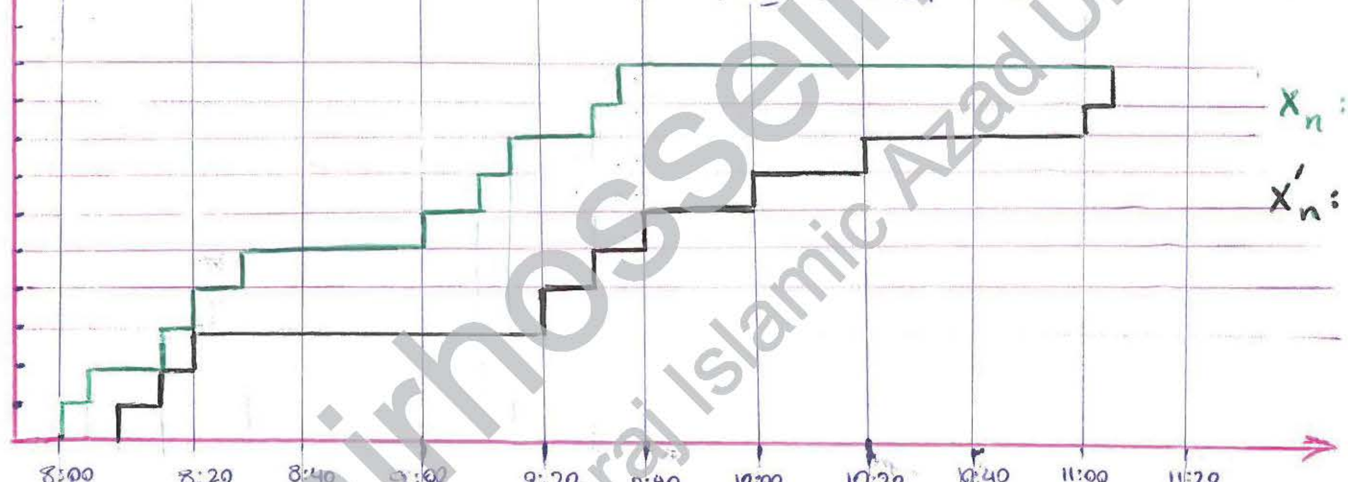
فصل پنجم

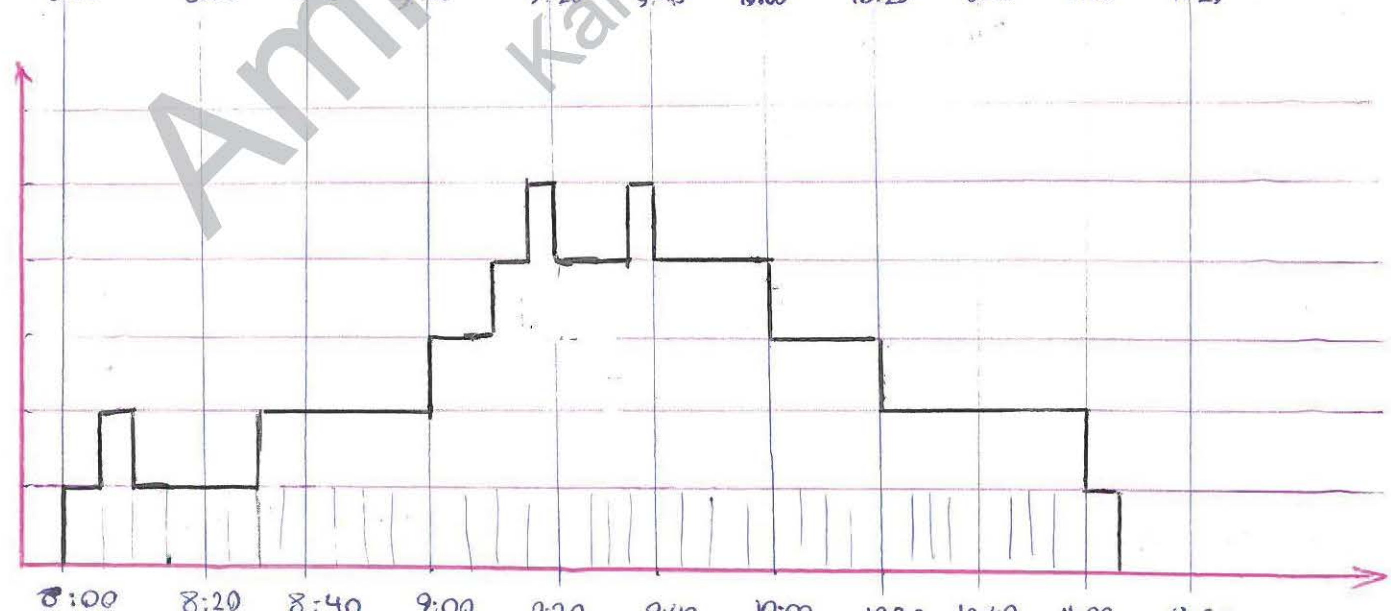
۱- در سیستم صف که دارای 3 خدمت دهنده است و زمان های ورود و خروج مشتری ها هم چون صورت سوال مفروض می باشد، خواهیم داشت:

الف) دیاگرام زمان سیستم صف مفروض به صورت زیر می باشد:



ب) دیاگرام ورود و خروج و تعداد مشتری ها داخل سیستم نیز به صورت زیر می باشند:





ج) اهمیت ورود مشتری (نرخ ورود مشتریان) با در اختیار داشتن تعداد مشتری وارد شده به سیستم در طول بازه کالبوردی برابر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\lambda_t = \frac{X(t)}{t}$$

$$= \frac{10}{185} = 0.054 \quad \text{نفر در دقیقه}$$

د) متوسط افراد داخل سیستم نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$= \frac{1+2+1+1+1+1+2+2+2+2+2+2+3+3+4+5+4+4+4+5+4+4+4+4+3+3+3+3+2+2+2+2+2+2+2+2+1}{(185 \div 5)}$$

$$= \frac{96}{37} = 2.59$$

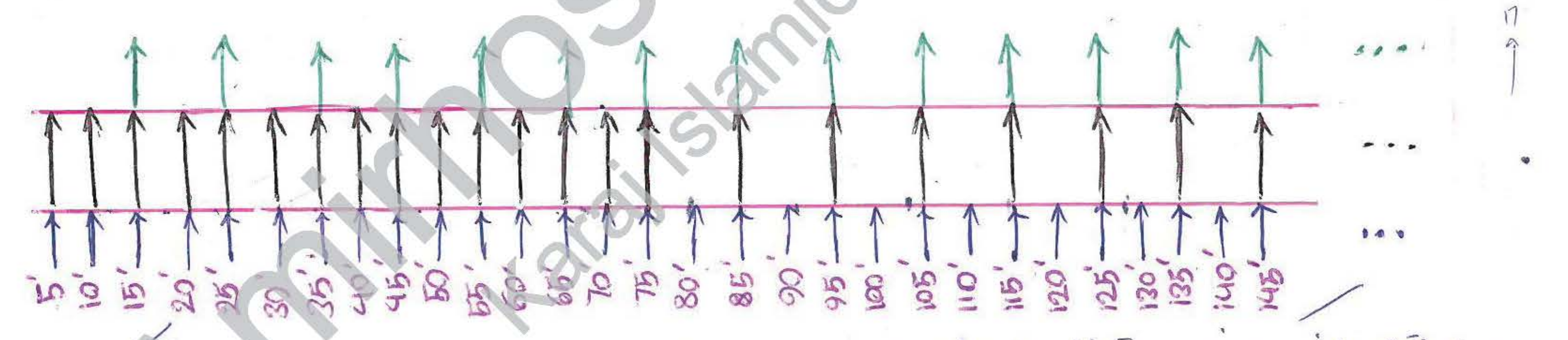
هـ) متوسط زمان انتظار در سیستم نیز در نهایت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W = \frac{10+10+5+70+50+60+30+65+90+95}{10} =$$

$$= \frac{485}{10} = 48.5 \quad \text{دقیقه به ازای هر نفر}$$

2- با توجه به اینکه ایستگاه ماشین‌سازی مورد نظر یک سیستم صف D/D/1/8 می‌باشد، خواهیم داشت:

الف) دیاگرام زمان سیستم صف فوق به صورت زیر می‌باشد:



ب) با توجه به اینکه نرخ ورودی سیستم صف $\mu > \lambda$ است، در درازمدت متوسط تعداد قطعات درون سیستم به بی‌نهایت میل می‌کند (شامل قطعات درحال دریافت سرویس و در صف)

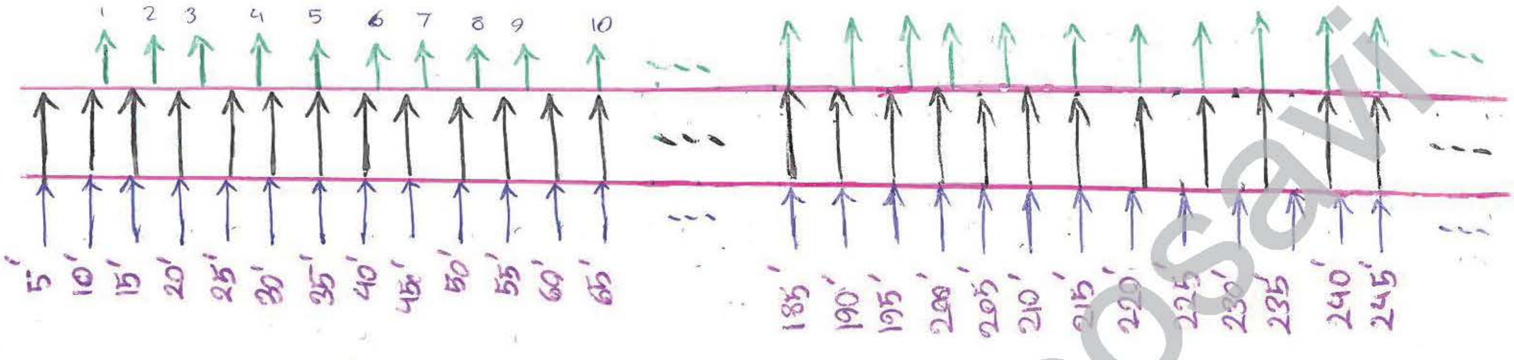
ج) با بررسی‌های انجام شده در دیاگرام زمان سیستم مورد نظر، مشخص می‌گردد که قطعه‌ی اول 10 دقیقه، قطعه‌ی دوم 15 دقیقه، قطعه‌ی سوم 20 دقیقه و ... در سیستم صف صرف می‌کنند. به همین ترتیب می‌توان متوسط زمانی که قطعه‌ی nام در سیستم صف مورد نظر صرف می‌کند را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$T_s^{(n)} = 10 + 5(n-1) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$W = \frac{\sum_{n=1} 10+5(n-1)}{N}$$

3- اگر در سوال 2 متوسط زمان تکمیل هر قطعه توسط دستگاه 6 دقیقه باشد، خواهیم داشت،

الف) دیاگرام زمان سیستم صف مورد بحث به صورت زیر می باشد:



ب) متوسط تعداد قطعات داخل سیستم در دراز مدت با توجه به مقدار λ به سمت بی نهایت میل می کند.

ج) مدت زمان انتظار n امین قطعه از لحظه ورود تا لحظه خروج به صورت زیر محاسبه می شود:

$$T_s^{(n)} = 5+n$$

بدین ترتیب، متوسط زمان انتظار قطعات در این سیستم صف به صورت زیر محاسبه می شود:

$$W = \frac{\sum_{n=1}^{N} 5+n}{N}$$

4- اگر نرخ ورود به یک سیستم به طور متوسط برابر با 20 نفر در ساعت باشد ($\lambda=20$) و اگر متوسط تعداد متقاضیان دریافت روزنامه در صف نیز حدود 4 نفر باشد ($L_q=4$)، متوسط زمان انتظار در صف روزنامه فروشی مذکور به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$W_q = L_q/\lambda$$
$$= 4/20 = 1/5 \text{ ساعت}$$

بدین ترتیب، هر فرد به طور میانگین 12 دقیقه ($1/5$ ساعت) در صف این روزنامه فروشی صرف خواهد کرد.

5- تعداد متوسط قطعات داخل دستگاه جوشکاری مفروض با پارامترهای $\lambda=20$ و $W=4$ برابر خواهد بود با:

$$L = \lambda W$$
$$= 20 \times 4 = 80 \text{ قطعه}$$

۶- با توجه به موقعیت سؤال ... $\lambda=15$ ...

الف) متوسط زمانی که یک بیمار در صف برای دریافت خدمت صرف می‌کند، برابر خواهد بود با:

$$W_q = L_q/\lambda$$

$$= 6/15 = 0.4 \quad \text{ساعت}$$

ب) با توجه به حضور 3 پزشک در این سیستم، نرخ سرویس دهی کل برابر 18 نفر در ساعت خواهد بود ($\mu_T=\mu_1+\mu_2+\mu_3$)

بدین ترتیب، تعداد بیماران در قسمت اورژانس (شامل کسانی که در حال دریافت سرویس هستند و کسانی که در صف انتظارند)

به طور متوسط

به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L=L_q+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$=6+\left(\frac{15}{18}\right)=6.83 \quad \text{نفر}$$

۷- با توجه به صورت سؤال، $L_{qA}=L_{qB}$ و $W_{qA}=W_{qB}$ است. با در نظر داشتن این که در هر سیستم صف $\lambda=\frac{L_q}{W_q}$ می‌باشد می‌توان

نتیجه گیری کرد که $\lambda_A>\lambda_B$ است. در نهایت، با توجه به حرکت کتاب توسط هر مشتری وارده شده می‌توان گفت که کتاب فروشی A

نسبت به کتاب فروشی B فروش بیشتری دارد.

۸- اگر وضعیت این سیستم صف را با استفاده از تعداد افراد داخل بانک تعریف کنیم، می‌توان این سیستم صف را در قالب

یک فرآیند تولد و مرگ با نرخ تولد $\lambda_i=\lambda$ و نرخ مرگ $\mu_1=\mu$، $\mu_2=2\mu$، $\mu_i=3\mu \;\; \forall i\geq 3$ مورد بررسی قرار داد. همانطور که می‌دانیم

احتمالات حدی در یک فرآیند تولد و مرگ برابر $\pi_i=\left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\pi_{i-1} \;\; \forall i\geq 1$ است. از طرفی می‌دانیم که $\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i=1$ است،

پس مقدار π_0 نیز محاسبه می‌گردد. بدین ترتیب خواهیم داشت:

الف) درصد مشتریانی که هنگام ورود در دریافت سرویس هستند که حداقل یک صندوق بیکار باشد، اگر این مسیر را حادثه A

بنامیم خواهیم داشت:

$$P(A)=\pi_0+\pi_1+\pi_2$$

ب) $\pi_2\times100$ درصد مواقع تنها یک صندوق خالی در این بانک وجود دارد.

ج) اگر در وضعیت 1 باشیم (یعنی تنها یک مشتری در صف حضور داشته باشد) با نرخ μ به وضعیت 0، با نرخ λ به وضعیت

2 می‌رویم. بدین ترتیب، احتمال بیکار شدن هر سه صندوق دار در حین خروج یک مشتری به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

حین خروج یک مشتری $= \binom{\ }{1} \dfrac{\mu \bar{\pi}_1}{\mu \bar{\pi}_1 + \lambda \bar{\pi}_1}$

د) $\bar{\pi}_0 \times 100$ درصد اوقات هر سه صندوق این بانک بیکار هستند.

ه) درصد مواقعی در این بانک صف تشکیل می‌شود که حداقل 4 مشتری در آنجا حضور داشته باشند. بدین ترتیب خواهیم داشت:

درصد مواقعی که در این بانک صف وجود دارد $= \bar{\pi}_4 + \bar{\pi}_5 + \cdots$

$$= 1 - (\bar{\pi}_0 + \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 + \bar{\pi}_3)$$

9- با خرید سیستم اول به قیمت 10,000,000 تومان که دارای نرخ سرویس دهی 20 اتومبیل در ساعت است و با در نظر گرفتن نرخ ورود 20 اتومبیل در ساعت این کارواش ($\lambda = 20$)، خواهیم داشت:

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}$$
$$= \frac{20}{20} = 1$$

بدین ترتیب، ضریب بهره‌وری این کارواش با خرید تجهیزات نوع اول برابر 1 خواهد بود؛ به عبارت دیگر هیچ مبلغی از سرمایه گذاری صورت گرفته راکد نخواهد ماند.

از طرف دیگر، اگر سیستم 6,000,000 تومانی که دارای نرخ سرویس دهی 25 اتومبیل در ساعت است خریداری شود، ضریب بهره‌وری برابر خواهد بود با:

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}$$
$$= \frac{20}{25} = 0.8$$

با مقایسه‌ی ضریب بهره‌وری دو کارواش مورد بحث می‌توان نتیجه‌گیری کرد که سیستم دوم با توجه به سرمایه گذاری و ضریب بهره‌وری کمتر انتخاب بهتری می‌باشد. ضریب بهره‌وری سیستم دوم نشان می‌دهد که حتی با افزایش نرخ ورود مشتری‌ها نیز (تا 25 اتومبیل در ساعت) صفی تشکیل نخواهد شد.

10- با توجه به اینکه متوسط زمان کوتاه کردن مو در این آرایشگاه دارای متغیر تصادفی نرمال با متوسط 15 دقیقه می‌باشد ...

$$\pi_0 = 1-\rho$$
$$= 1-\lambda/\mu$$
$$= 1-3/4 = 0.25$$

بنابراین، 25 درصد مواقع این آرایشگر بیکار است.

11- با توجه به اینکه مدت زمان مکالمه توسط این تلفن از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند، برای محاسبه متوسط زمان مکالمه باید امید ریاضی آن را محاسبه کرد؛ بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\,dx$$
$$= \int_{2}^{4} x \times \frac{1}{4-2}\,dx$$
$$= \int_{2}^{4} \frac{x}{2}\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_2^4$$
$$= 4-1 = 3$$

پس هر مکالمه به طور متوسط 3 دقیقه طول می‌کشد؛ در نتیجه نرخ سرویس دهی این خط تلفن برابر 20 تلفن در ساعت می‌باشد. حال می‌توان میزان مشغولی این خط تلفن در یک ساعت را به صورت زیر محاسبه کرد:

میزان مشغولی این خط تلفن در یک ساعت $= 1-\pi_0$
$$= \rho$$
$$= \lambda/\mu$$
$$= \frac{12}{20} = 0.6 \quad \text{ساعت}$$

این خط تلفن 36 دقیقه (0.6×60) در یک ساعت مشغول سرویس دهی می‌باشد.

12- همانطور که در صورت سؤال ذکر شده است کمد ⟵ جعبه‌های شامل 2، 3 و 5 قطعه ⟵
به ترتیب با احتمال 0.1، 0.3 و 0.6 وارد قسمت کنترل کیفیت می‌شوند. علاوه بر این، بعد از این...

$$\text{متوسط زمان بازرسی هر} = (2\times1)\times0.1 + (3\times1)\times0.3 + (5\times1)\times0.6 = 4.1 \quad \text{دقیقه}$$

حال نرخ سرویس دهی این سیستم صف (نرخ کنترل کیفیت قطعات توسط اپراتور) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\mu = \frac{60}{4.1} = 14.63 \quad \text{قطعه در ساعت}$$

در نهایت میزان بیکاری این اپراتور در یک ساعت برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} \text{میزان بیکاری} &= \pi_0 \\ &= 1-\rho \\ &= 1-\lambda/\mu \\ &= 1-\frac{10}{14.63} = 0.31 \quad \text{ساعت} \end{aligned}$$

پس این اپراتور در یک روز کاری 148.8 دقیقه $(0.31\times60\times8=148.8)$ بیکار می باشد.